المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم العالي
وتكوين الأطر
والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2009
الموضوع

C:NS24

المــادة:	الرياضيات	المعامل:	9
الشعب(ة) أو المسلك :	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	مدة الإنجاز:	4

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة

التمرين الأول:(3 نقط)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 .

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. لتكن F مجموعة

المصفوفات $M(x,y)$ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بحيث : $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&\frac{1}{x}\end{pmatrix}$ مع $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

0,25 — 1- أ) بين أن F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

1 — ب) بين أن $(F,\times)$ زمرة غير تبادلية.

2- لتكن G مجموعة المصفوفات $M(x,0)$ من F حيث $x\in\mathbb{R}^*$

0,5 — بين أن G زمرة جزئية للزمرة $(F,\times)$.

3- نيكن $E=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

نزود المجموعة E بقانون التركيب الداخلي $\perp$ المعرف بما يلي:

$$\forall(x,y)\in E\ ;\ \forall(a,b)\in E\qquad (x,y)\perp(a,b)=\left(xa, xb+\frac{y}{a}\right)$$

نعتبر التطبيق :

$$\varphi:(F,\times)\to(E,\perp)$$
$$M(x,y)\to\varphi(M(x,y))=(x,y)$$

0,25 — أ) احسب $(1,1)\perp(2,3)$ و $(2,3)\perp(1,1)$

0,5 — ب) بين أن φ تشاكل تقابلي .

0,5 — ج) استنتج بنية $(E,\perp)$.

التمرين الثاني:(4 نقط)

m عدد عقدي يخالف 1 .

I. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z:

$$(E) : z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)=0$$

1- أ) تحقق أن مميز المعادلة (E) هو: $\Delta=[(1+i)(m-1)]^2$ — 0,25

ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) — 0,25

ج) حدد على الشكل الجبري قيمتي العدد العقدي m لكي يكون جداء حلي المعادلة (E) يساوي 1 . — 0,5

2- نضع: $z_1=1-im$ و $z_2=m-i$ — 1

في حالة $m=e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ، أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.

II. المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$.

نعتبر النقط M و M_1 و M_2 التي ألحاقها على التوالي هي m و $z_1=1-im$ و $z_2=m-i$

1- حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط M و M_1 و M_2 مستقيمية — 0,5

2- أ) بين أن التحويل R الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' التي لحقها $z'=1-iz$ — 0,5

هو دوران ينبغي تحديد لحق مركزه Ω و قياسا لزاويته.

ب) بين أن العدد العقدي $\frac{z_2-z_1}{z_2-m}$ تخيلي صرف إذا و فقط إذا كان $Re(m)+Im(m)=1$ — 0,5

($Re(m)$ هو الجزء الحقيقي للعدد m و $Im(m)$ هو جزؤه التخيلي)

ج) استنتج مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة. — 0,5

التمرين الثالث:(3 نقط)

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $a_n=2^n+3^n+6^n-1$

1- أ) تحقق أن a_n عدد زوجي لكل n من $\mathbb{N}^*$ — 0,25

ب) حدد قيم n التي يكون من أجلها $a_n\equiv 0[3]$ — 0,5

2- ليكن p عددا أوليا بحيث $p>3$

أ) بين أن $2^{p-1}\equiv 1[p]$ و $3^{p-1}\equiv 1[p]$ و $6^{p-1}\equiv 1[p]$ — 0,75

ب) بين أن p يقسم a_{p-2} — 0,75

ج) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي أولي q يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم n بحيث: $a_n \wedge q = q$ ($a_n \wedge q$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و q) — 0,75

مسألة:(10 نقط)

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي:

$f_n(0)=0$ و $f_n(x)=x(1-\ln x)^n$ من أجل $x>0$

ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

<u>الجزء الأول</u>

1- أ) بين أن الدالة f_n متصلة على اليمين في 0 .(يمكنك وضع $x=t^n$) — 0,5

ب) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في 0 — 0,25

ج) حدد النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x}$ — 1

2- أ) ادرس تغيرات الدالة f_1 — 0,5

ب) ادرس تغيرات الدالة f_2 — 0,5

3- أ) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) — 0,25

ب) أنشئ المنحنيين (C_1) و (C_2) .(نقبل أن $A(1,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_2)) (نأخذ : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$) — 0,5

<u>الجزء الثاني</u>

نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty,0[$ بما يلي : $F(x)=\int_{e^x}^{1}\frac{f_1(t)}{1+t^2}dt$

1- أ) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty,0[$ و أن : $F'(x)=\frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$ $(\forall x<0)$ — 0,5

ب) استنتج منحى تغيرات الدالة F على المجال $]-\infty,0[$ — 0,25

2- أ) بين أن: $\frac{1}{2}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt \le F(x) \le \frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt$ $(\forall x<0)$ — 0,25

ب) تحقق أن الدالة $x \to x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)$ هي دالة أصلية للدالة f_1 على المجال $]0,+\infty[$ — 0,25

ج) بين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt=\frac{3}{4}$ — 0,25

3- نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ عندما يؤول x إلى $-\infty$. بين أن: $\frac{3}{8} \le \ell \le \frac{3}{4}$	0,25
الجزء الثالث	
لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = \int_1^e f_n(x)dx$	
1- أ) بين أن: $u_n \ge 0$ $(\forall n \ge 1)$	0,5
ب) حدد إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $[1,e]$	0,5
ج) بين أن: $u_{n+1} \le u_n$ $(\forall n \ge 1)$	0,25
د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة	0,25
2- أ) بين أن: $u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}u_n$ $(\forall n \ge 1)$	0,5
ب) استنتج بالسنتمتر المربع (cm^2) مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنيين (C_1) و (C_2) والمستقيمين الذين معادلتيهما على التوالي $x=1$ و $x=e$	0,5
3- أ) بين أن: $\frac{1}{n+1} \le u_n \le \frac{1}{n-1}$ $(\forall n \ge 2)$ (يمكنك استعمال الأسئلة: 1-أ) و 1- ج) و 2- أ))	0,75
ب) حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim_{n\to+\infty} nu_n$	0,5
4- a عدد حقيقي مخالف للعدد u_1 .	
نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ المعرفة بما يلي: $v_1 = a$ و $v_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}v_n$ $(\forall n \ge 1)$	
و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع: $d_n = \lvert v_n - u_n \rvert$	
أ) بين أن: $d_n = \frac{n!}{2^{n-1}}d_1$ $(\forall n \ge 1)$	0,25
ب) بين أن: $\lim_{n\to+\infty} d_n = +\infty$	0,5
ج) استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ متباعدة .	0,25

التمــــــــرين الاول : البِنيـــــات الجَبرِيـــــــة

لتكن F المجمُوعة : $F = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) / (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \right\}$

1 ـ أ) لنبين ان F جزءُ مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

لتكن $M(x,y)$ و $M(a,b)$ من F لدينًا

$$M(x,y) \times M(a,b) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb + \frac{y}{a} \\ 0 & \frac{1}{xa} \end{pmatrix} = M(xa, xb + \frac{y}{a})$$

و منه F جزءُ مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

ب) لنبين أَن $(F, \times)$ زُمرة غير تبادلية

(1) بمَا أَن F جزءُ مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ و $\times$ تجميعي في $M_2(\mathbb{R})$ فإِن $\times$ تجميعي في F

(2) لدينًا $I = M(1,0) \in F$ العنصر المحايد في F بالنسبة ل $\times$ في F

(3) كل عنصر $M(x,y)$ من F يقبل $M(\frac{1}{x}, -y)$ مُماثل له بالنسبة ل $\times$ في F

(4) $\times$ غير تبادلي في F , لدينًا مثَال مُضَاذ :

$$M(1,1) \times M(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

و $M(2,3) \times M(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

و منه $M(1,1) \times M(2,3) \neq M(2,3) \times M(1,1)$

2 ـ لتكن $G = \{M(x,0) \in F / x \in \mathbb{R}^*\}$ لنبين أَن G زُمرة جُزئية من $(F, \times)$

(1) لدينًا $G \neq \varnothing$ لأَن $I \in G$

(2) ليكن x و a من $\mathbb{R}^*$ لدينًا : $M(x,0) \times M(a,0)^{-1} = M(x,0) \times M(\frac{1}{a}, 0) = M(\frac{x}{a}, 0)$

3 ـ ليكن $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}.$

نزُود E بقانُون التركيب الداخلي $\perp$ $\forall (x,y) \in E, \forall (a,b) \in E : (x,y) \perp (a,b) = (xa, xb + \frac{y}{a})$

نعتبر التطبيق : $\begin{array}{rcl} \phi : (F, \times) & \mapsto & (E, \perp) \\ M(x,y) & \mapsto & (x,y) \end{array}$

أ) $(2,3) \perp (1,1) = (2,5)$ و $(1,1) \perp (2,3) = (2, \frac{7}{2})$

ب) (1) لنبين ان ϕ تشاكل : لتكن $M(x,y)$ و $M(a,b)$ عنصرين من F; لدينًا

$\phi(M(x,y) \times M(a,b)) = \phi(M(xa, xb + \frac{y}{a}))$: حسب الجواب 1) أ)

ولدينًا كذلك من جهة ثانية

: $\phi(M(xa, xb + \frac{y}{a})) = (xa, xb + \frac{y}{a}) = (x,y) \perp (a,b) = \phi(M(x,y) \perp \phi(M(a,b))$ ومنه

$\phi(M(x,y) \times M(a,b)) = \phi(M(x,y) \perp \phi(M(a,b))$

(2) لنبين ان ϕ تقابل :

كل زوج (x,y) من E يحدِد مصفُوفة وحيدة $M(x,y)$ من F بحيثُ $\phi(M(x,y)) = (x,y)$

ج) من السُؤال السابق نستنتجُ ان $(E,\perp)$ و $(F,\times)$ لهمَا نفس البنية الجبرِية , إِذن $(E,\perp)$ زُمرة غير تبادلية

.

التمـــــــرين الثاني : الأَعـــــداد العقديـــــة

m عدَدُ عقديٌ بحيث $m \neq 1$

$I-$ نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(E) : z^2 - (1-i)(1+m)z - i(m^2+1) = 0$:

1- أ) لنتحقَق من أَن $\Delta = [(1+i)(m-1)]^2$

لدينَا $\Delta = [(1-i)(1+m)]^2 + 4i(m^2+1)$

بمَاأَن $(1-i)^2 = -2i$ و $(1+i)^2 = 2i$ فإِن

$$\Delta = 2i(m^2-2m+1) = (1+i)^2(m-1)^2 = [(1+i)(m-1)]^2$$

ب) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

E تقبل حلين همَا : $z_1 = \dfrac{(1-i)(1+m)-(1+i)(m-1)}{2} = 1 - im$ و

$$z_2 = \frac{(1-i)(1+m)+(1+i)(m-1)}{2} = m - i$$

ج) $z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow (1-im)(m-i) = 1 \Leftrightarrow -i(m^2+1) = 1$

$$\Leftrightarrow m^2+1 = i \Leftrightarrow m^2 = -1+i$$

نضع $m = x+iy$ المتساوية $m^2 = -1+i$ تصبح تكافيء النظمة (S) التالية :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

بمَاأَن x و y لهمَا نفس الإِشارة فإِن

$$m = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \quad \text{أَو} \quad m = -\left[\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right]$$

2- في حالة $m = e^{i\theta}$ و $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$, لدينَا :

$$z_1 = 1 - im = 1 + e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})} = e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}\left(e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})} + e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}$$ و

بمَاأَن $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ فإِن $0 < \dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2}$ ومنه

$$z_1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_2 = m - i = e^{i\theta} + e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}\left(e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} + e^{-i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\right)$$

و بمَاأَن $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ فإِن $\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi$ ومنه

$$z_2 = 2e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4})}\ cos(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) = 2\ cos(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta}{2})\left(\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4})\right)$$

II نعتبر النقط $M(m)$, $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$

1 تكُون النقط M_2, M_1, M مستقمية إِذَا وفقط إِذَا كان $\frac{z_1 - m}{z_2 - m} \in \mathbb{R}$ أَي $\frac{1 - im - m}{-i} \in \mathbb{R}$ أَي $i + m - im \in \mathbb{R}$

نضع $m = x + iy$ مع $(x, y \in \mathbb{R}, (x, y) \neq (1, 0))$ ومنه مجمُوعة النقط M بحيث M_2, M_1, M مستقمية هي التي تحقِق $i + x + iy - i(x + iy) \in \mathbb{R}$ اي $1 + y - x = 0$ اي مستقيم معَادلته $1 + y - x = 0$ محروم من النقطة $A(1, 0)$

2– أَ) لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ بحيث $z' = 1 - iz$

لدينَا التحويل R يقبل نقطة صامدة لحقهَا ω يحقِق $\omega = 1 - i\omega \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ ومنه $z' = 1 - iz \Leftrightarrow z' - \omega = -i(z - \omega)$ و منه $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq \omega, \frac{z' - \omega}{z - \omega} = -i.$

لتكن Ω النقطة ذات اللّحِق $\omega = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ نستنتج ان $\Omega M' = \Omega M.$ $\overline{\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)} \equiv -\frac{\pi}{2}[2\Pi]$ إِدن R دوران مركزه Ω و قياس زاويته $-\frac{\pi}{2}$

ب) نضع $m = x + iy,$

$$\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \in I\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{m - i - 1 + im}{m - i - m} \in I\mathbb{R} \Leftrightarrow i(x + iy - i - 1 + ix - y) \in I\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow -y + 1 - x = 0 \Leftrightarrow Re(m) + Im(m) = 1$$

ج) لدينَا $z_1 = 1 - im \Rightarrow R(M) = M_1$ ومنه المثلث ΩMM_1 قائِم الزاوية في Ω ومنه توجد دائِرة (C) وحيدة تمر من M, M_1 و Ω بحيث $[MM_1]$ قطر فيهَا، و هي الدائِرة المحيُطة بِالمثلث ΩMM_1 .
و منه تكون النقط Ω, M, M_1 و M_2 متداورة يكافيءِ $M_2 \in (C)$ يكافيءِ M_2MM_1 قائِم الزاوية في M_2 يكافيءِ $\overline{\left(\overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{M_2M_1}\right)} \equiv \pm\frac{\pi}{2}[2\Pi]$ يكافيءِ $arg(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}) \equiv \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$ يكافيءِ $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \in I\mathbb{R}$ يكافيءِ حسبَ السُؤال السابق $Re(m) + Im(m) = 1$

إِذن مجموعة النقط $M(m)$ اللَتي تحقِق Ω, M, M_1 و M_2 متداورة هي المستَقيم الذي معادلته $x + y - 1 = 0$: محروم من النقطة $A(1, 0)$

.

التمـــــــرين الثالث : الحــسابـــــــــيات

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضــــع : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

1 أَ) لنتحـــقــق من انه لكل n من $\mathbb{N}^*$ a_n عدَد زوجي

$$2 \equiv 0[2] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n \equiv 0[2]$$
$$3 \equiv 1[2] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 3^n \equiv 1[2]$$

$6 \equiv 0[2] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 6^n \equiv 0[2]$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0[2]$

إِذن لكل n من $\mathbb{N}^*$ a_n عدَد زوجي

ب) لنُحَدِد قيم n التي يكون من اجلهَا $a_n \equiv 0[3]$ $2 \equiv -1[3] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n \equiv (-1)^n[3]$

$3 \equiv 0[3] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 3^n \equiv 0[3]$

$6 \equiv 0[0] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 6^n \equiv 0[3]$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv (-1)^n - 1 \equiv 0[3]$ إِذَا وفقط إِذَا كان n عدَد زوجي

2– ليكن p عدَدَا أَوليَا بحيث $p > 3$

أَ) بمَا أَن $p > 3$ و p أَولي فإِن $p \barwedge 2 = p \barwedge 3 = 1$ و $p \barwedge 6 = 1$ فإِنه حسَبَ مبرهَنة $(Fermat)$ $2^{p-1} \equiv 1[p], 3^{p-1} \equiv 1[p]$ و $6^{p-1} \equiv 1[p]$

بـ)لدينَا $6a_{p-2} = 3 \times 2^{p-1} + 2 \times 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6$ من السُؤال السابق نستنتج ان $6a_{p-2} = 32^{p-1} + 23^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \equiv 3 + 2 + 1 - 6 \equiv 0[p]$

ومنه $p/6a_{p-2}$ و بمَا أَن $p \barwedge 6 = 1$ فإِن حسبَ مبرهَنة $(GAUSS)$ p/a_{p-2}

ج) ليكن q عدَدَا أَوليَا

الحالة I : $q = 2$ من السُؤال 1– أَ) $\forall k\mathbb{N}^*, q/a_k$ و $a_k \barwedge q = q$ ومنه $n = k$

الحالة II : $q = 3$ من السُؤال 1– ب) $\forall k\mathbb{N}^*, q/a_{2k}$ و $a_{2k} \barwedge q = q$ ومنه $n = 2k$

الحالة III : $q > 3$ من السُؤال 2– ب) q/a_{q-2} و $a_{q-2} \barwedge q = q$ ومنه $n = q - 2$

.

مسأَلة : التحـــــليــــــل

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة $f_n : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ المعرفة بمَا يلي $f_n(x) = x(1 - ln(x))^n$: إِذَا كان $x > 0$ و $f_n(0) = 0$

(C_n) منحناهَا في مَعلم مُتعامد مُمنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

الجُزء الاوَل

1– أَ) إِتصال f_n عَلَى اليمين في الصفر

لنبين ان $f_n(0) = \lim_{x\to 0^+} f_n(x)$

بوضع $t^n = x$ نحصل عَلَى

$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{t\to 0^+} t^n(1 - nln(t))^n = \lim_{t\to 0^+} (t - ntln(t))^n = 0 = f_n(0)$ لأَن $\lim_{t\to 0^+} tln(t) = 0$

ب) قابليَة اشتِقاق f_n عَلَى اليمين في الصفر

لنحسب $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}$

لدينَا $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}(1-ln(x))^n=+\infty$ لأَن $\lim\limits_{t\to 0^+}-ln(t)=+\infty$ إذن f_n غير قابلة لِلإشتِقاق عَلَى اليمين في الصفر

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-ln(x))=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_1(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-ln(x))=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f_2(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-ln(x))^2=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_2(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-ln(x))^2=+\infty$

2– أَ) تغيرات f_1

لدينَا f_1 قابلة لِلإشتِقاق علَى $\mathbb{R}_+^*$ و $\forall x>0, f_1'(x)=1-ln(x)-1=-ln(x)$

جدول تغيرات f_1

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

2– ب) تغيرات f_2

لدينَا f_2 قابلة لِلإشتِقاق علَى $\mathbb{R}_+^*$ و

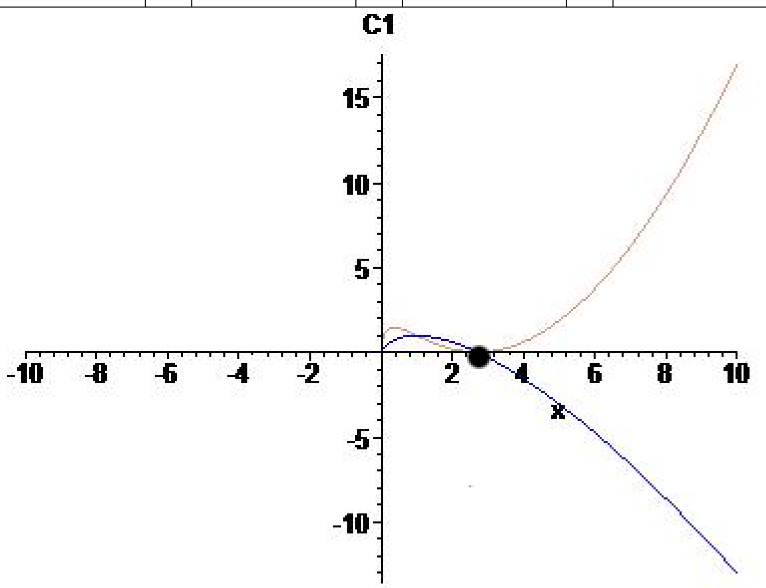
$\forall x>0, f_2'(x)=(1-ln(x))^2-2x\dfrac{1}{x}(1-ln(x))=(ln(x)-1)(1+ln(x))$

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$f_2'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3– أَ) دراسة الوضع النسبِي ل (C_1) و (C_2) :

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*, f_1(x)-f_2(x)=x(1-ln(x)(1-1+ln(x))=xln(x)(1-ln(x))$

x	0		1		e		$+\infty$
$f_1(x)-f_2(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
اَلوضع النسبِي		C_2 فوق C_1		C_1 فوق C_2		C_2 فوق C_1	



اَلجُزء الثاني

1- نعتبر الدالة F بحيثُ : $\forall x \le 0, F(x) = \int_{e^x}^{1} \frac{f_1(t)}{1+t^2}dt$

أَ) اَلدالة $t :\mapsto \frac{f_1(t)}{1+t^2}$ مُتصلة علَى $[0,+\infty[$ و الدالة $u : x \mapsto e^x$ قابلة لِلإِشتِقاق علَى $]-\infty,0[$ و $u(]-\infty,0[) \sqsubset [0,+\infty[$ و منه F قابلة لِلإِشتِقاق علَى $]-\infty,0[$ و ان

$$\forall x < 0, F'(x) = -e^x \frac{(f(e^x))}{1+e^{2x}} = -\frac{e^x e^x(1-ln(e^x))}{1+e^{2x}} = \frac{e^{2x}(x-1)}{1+e^{2x}}$$

ب) F تناقصية علَى $]-\infty,0[$

2- أَ) ليكن x من $]-\infty,0[$ لدينَا $\forall t \in [e^x,1], 2 \ge 1+t^2 \ge 1+e^{2x}$ و $0 \le f_1(t)$ ومنه

$$\forall t \in [e^x,1], \frac{1}{2}f_1(t) \le \frac{1}{1+t^2}f_1(t) \le \frac{1}{1+e^{2x}}f_1(t)$$

و منه

$$\int_{e^x}^{1} \frac{1}{2}f_1(t)dt \le \int_{e^x}^{1} \frac{1}{1+t^2}f_1(t)dt \le \int_{e^x}^{1} \frac{1}{1+e^{2x}}f_1(t)dt$$

آي

$$\frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt \le F(x) \le \frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt$$

2- ب) لكل x من $]-\infty,0[$ لدينَا $\left(x^2(\frac{3}{4}-\frac{ln(x)}{2})\right)' = f_1(x)$

ج) $\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt = \left[t^2(\frac{3}{4}-\frac{ln(t)}{2})\right]_{e^x}^{1} = \frac{3}{4} - e^{2x}(\frac{3}{4}-\frac{x}{2})$ و بما أَن $\lim_{x\to-\infty} e^{2x}(\frac{3}{4}-\frac{x}{2}) = 0$ فإِن

$$\lim_{x\to-\infty}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt = \frac{3}{4}$$

3- من السُؤال 2- ب) نستنتج ان $\frac{3}{8} \le l \le \frac{3}{4}$

اَلجُزء الثالث

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $u_n = \int_{1}^{e} f_n(t)dt$

1- أَ) ليكن n من $\mathbb{N}^*$ لدينَا $\forall x \in [1,e], f_n(x) \ge 0$ ومنه $u_n = \int_{1}^{e} f_n(t)dt \ge 0$

ب) ليكن x من $[1,e]$ لدينَا $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x(1-ln(x))^n(1-ln(x)-1) = -xln(x)(1-ln(x))^n$ و لدينَا

$$1 \le x \le e \Rightarrow \begin{cases} 0 \le ln(x) \\ 0 \le 1-ln(x) \\ 0 \le (1-ln(x))^n \end{cases}$$

ومنه $\forall x \in [1,e], f_{n+1}(x) - f_n(x) \le 0$

ج)ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ من السُؤال السابق بمكاملة المتفاوتة $f_{n+1} - f_n \le 0$ عَلَى $[1,e]$ نحصل عَلَى $u_{n+1} \le u_n$

د) (u_n) مصغورة بالصفر حسب (1- أَ)) و تناقصية حسب (1- ج))

2- أ) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ نضع $u'(x) = x, \quad v(x) = (1 - ln(x))^{n+1}$
$u(x) = \frac{x^2}{2}, \quad v'(x) = -(n+1)\frac{(1 - ln(x))^n}{x}$
ومنه $u_{n+1} = \int_1^e x(1 - ln(x))^n dx = \left[\frac{x^2}{2}(1 - ln(x))^{n+1}\right]_1^e + \frac{(n+1)}{2}\int_1^e x(1 - lnx)^n dx$
$\forall n \geq 1, u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}u_n$

ب) لتكن $\mathcal{A}$ مساحة حيز المستوَى المحصور بين C_1 و C_2 و المستقيمين الذين معادلتيهمَا علَى التوالِي $x = 1$ و $x = e$ بالسنتمتر .
$$\mathcal{A} = \int_1^e |f_2(x) - f_1(x)|dx \times 4cm^2 = u_1 - u_2 \times 4cm^2$$
ولدينَا حسبَ (2- أَ)) $u_1 - u_2 = \frac{1}{2}$ ومنه $\mathcal{A} = 2cm^2$

3- أَ) لكل $n \geq 2$ حسب (2- أَ)) $u_n - \frac{1}{n+1} = (n+1)u_n - 1 = 2u_{n+1}$ وبمَا أَن حسب (1- أَ)) $u_{n+1} \geq 0$ فإِن $u_n - \frac{1}{n+1} \geq 0$ إِذن $u_n \geq \frac{1}{n+1}$
ولدينَا لكل $n \geq 2$ حسب (2- أَ)) $2u_{n+1} + 1 = (n+1)u_n$ و بمَا أَن (u_n) تناقصية فإِن $2u_{n+1} + 1 \leq 2u_n + 1$ ومنه $(n+1)u_n \leq 2u_n + 1$ ومنه $u_n \leq \frac{1}{n-1}$ وبالتالي
$$\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$$

ب) من السُؤَال السابق نستنتج $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$, $\lim_{n \to +\infty} nu_n = 1$

4- $a \in \mathbb{R}$ بحيث $a \neq u_1$; $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}v_n, v_1 = a$ و $\forall n \geq 1, d_n = |v_n - u_n|$

أَ) لنبين بالترجع أَنَ $\forall n \geq 1, d_n = \frac{n!}{2^{n-1}}d_1$
لدينَا من آجل $n = 1$: $d_1 = d_1$
ليكن $n \geq 1$ نَفتَرِض أَنَ $d_n = \frac{n!}{2^{n-1}}d_1$ لدينَا
$$d_{n+1} = |v_{n+1} - u_{n+1}| = \frac{(n+1)}{2}|v_n - u_n| = \frac{(n+1)}{2}d_n = \frac{(n+1)!}{2^n}d_1$$

ب) من السُؤَال السابق نستنتج أَن $\forall n \geq 1 : \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{n+1}{2}$ ومنه $\forall n \geq 3 \Rightarrow \frac{n+1}{2} \geq 2 \Rightarrow, \frac{d_{n+1}}{d_n} \geq 2$ وبالترجع نحصل عَلَى $d_n \geq 2^{(n-3)}d_3$ وبماأَن $\lim_{n \to +\infty} 2^{(n-3)}d_3 = +\infty$ فإِنَ $\lim_{n \to +\infty} d_n = +\infty$

ج) إِذَ كانت (v_n) متقاربة و علمًا أَنَ (u_n) متقاربة و $d_n = |v_n - u_n|$ فإِنَ (d_n) ستَكونُ مُتقاربة و هذَا تنَاقضُ

C: NS24

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي
كتابة الدولة المكلفة بالتعليم المدرسي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
-الدورة العادية 2008-
الموضوع

المادة:	الرياضيات	المعامل:	9
الشعب(ة):	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	مدة الإنجاز:	4س

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة

التمرين الأول:(3,25 نقطة)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية و $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ فضاء متجهي حقيقي و $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي.

نضع:

$$E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a\end{pmatrix} / a,b\in\mathbb{R}\right\} \text{ و } J=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix} \text{ و } I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

0,75 — 1) أ) بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$

0,5 — ب) بين أن الأسرة (I,J) أساس في الفضاء المتجهي $(E,+,.)$

2) نعتبر التطبيق :
$$f:\mathbb{C}^* \longrightarrow E^*$$
$$a+ib \longrightarrow M(a,b)$$
حيث : $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$

0,25 — أ) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

0,5 — ب) بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$

0,5 — 3) بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

0,75 — 4) حل في E المعادلة : $J\times X^3=I$ (حيث $X^3=X\times X\times X$)

التمرين الثاني:(3,75 نقطة)

ليكن a عددا عقديا غير منعدم و $\bar{a}$ مرافق العدد a.

I- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(G) \quad iz^2+(a+\bar{a}-i)z-\bar{a}-ia\bar{a}=0$

0,5 — 1) أ) تحقق أن مميز المعادلة (G) هو: $\Delta=(a-\bar{a}-i)^2$

0,5 — ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (G) .

0,5 — 2) بين أن a حل للمعادلة (G) إذا و فقط إذا كان $Re(a)=Im(a)$ (حيث $Re(a)$ هو الجزء الحقيقي للعدد العقدي a و $Im(a)$ هو جزءه التخيلي)

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ ،نفترض أن $\text{Re}(a)\neq \text{Im}(a)$
نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و $i\bar{a}$ و $1+ia$

1) نضع : $Z=\dfrac{(1+ia)-a}{(i\bar{a})-a}$

0,5 أ) تحقق أن : $\bar{Z}=\dfrac{(i-1)\bar{a}-i}{i\bar{a}-a}$

0,5 ب) بين أن النقط A و B و C مستقيمية إذا و فقط إذا كان $\text{Im}(a)=\dfrac{1}{2}$

2) نفترض في هذا السؤال أن $\text{Im}(a)\neq\dfrac{1}{2}$

نعتبر R_1 الدوران الذي مركزه A و زاويته $-\dfrac{\pi}{2}$ و R_2 الدوران الذي مركزه A و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

نضع : $R_1(B)=B'$ و $R_2(C)=C'$

لتكن النقطة E منتصف القطعة $[BC]$

0,5 أ) حدد b' و c' لحقي النقطتين B' و C' على التوالي .

0,75 ب)بين أن المستقيمين (AE) و $(B'C')$ متعامدان و أن $B'C'=2AE$

<u>التمرين الثالث</u> :(3 نقط)

I- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية : $35u-96v=1 \quad (E)$

0,25 1)تحقق أن الزوج $(11,4)$ حل خاص للمعادلة (E)

0,5 2)استنتج مجموعة حلول المعادلة (E)

II- نعتبر في المجموعة $\mathbb{N}$ المعادلة التالية: $x^{35}\equiv 2\,[97] \quad (F)$

1) ليكن x حلا للمعادلة (F)

0,5 أ)بين أن العدد 97 أولي و أن x و 97 أوليان فيما بينهما .

0,5 ب) بين أن : $x^{96}\equiv 1\,[97]$

0,5 ج) بين أن : $x\equiv 2^{11}\,[97]$

0,25 2) بين أنه إذا كان العدد الصحيح الطبيعي x يحقق $x\equiv 2^{11}\,[97]$ فإن x حل للمعادلة (F)

0,5 3) بين أن مجموعة حلول المعادلة (F) هي مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية التي تكتب على الشكل $11+97k$ حيث $k\in\mathbb{N}$

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
(الدورة العادية 2008)
الموضوع
C: NS24

المـــادة :	الرياضيات
الشعـب(ة):	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)

التمرين الرابع:(10 نقط)

I – لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي : $f(x)=2x-e^{-x^2}$
و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,5 — 1) أ) احسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

0,5 — ب) احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}_+$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

0,5 — ج) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}_+$ و أن $0<\alpha<1$

0,5 — د) ادرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0,1]$

0,5 — 2) أنشئ المنحنى (C) .(نأخذ : $\alpha\approx 0,4$)

II – نعتبر الدالتين العدديتين φ و g للمتغير الحقيقي x المعرفتين على $\mathbb{R}_+$ بما يلي :

$$\begin{cases}\varphi(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt\ ;\ x>0\\ \varphi(0)=1\end{cases} \quad و \quad g(x)=x^2-\int_0^x e^{-t^2}dt$$

0,5 — 1) أ)بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\left(\exists c\in]0,x[\right)\ :\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt=e^{-c^2}$

0,5 — ب) استنتج أن : $\int_0^1 e^{-t^2}dt<1$

0,5 — 2) أ) بين أن: $g(\alpha)=\int_0^\alpha f(t)dt$

0,5 — ب) بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+$ و أن: $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+\right)\ ;\ g'(x)=f(x)$

0,5 — ج) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]\alpha,1[$

0,5 — 3) أ)بين أن الدالة φ متصلة على اليمين في الصفر.

0,5 — ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ ;\ \varphi(x)=e^{-x^2}+\dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$

0,75 — ج) بين أن الدالة φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و أن: $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ ;\ \varphi'(x)=-\dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$

0,5 — د) بين أن : $\varphi([0,1])\subset[0,1]$

0,5 — 4) أ) بين أنه لكل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}_+$ لدينا : $\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\le\dfrac{x^3}{3}$

ب) بين أن : $(\forall x \in]0,1[) ; \|\varphi'(x)\| \leq \frac{2}{3}$	0,5
ج) بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \; ; \; \varphi(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$	0,25
5) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = \frac{2}{3}$ و $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; u_{n+1} = \varphi(u_n)$	
أ) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; 0 \leq u_n \leq 1$	0,5
ب) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; \|u_n - \beta\| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$	0,5
ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة و حدد نهايتها.	0,5

التمريـــــــن الأول : (3,25 نقطة)

- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية.
- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$ فضاء متجهي حقيقي.
- $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي.
- نضع : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}0&\sqrt{3}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0\end{pmatrix}$ و $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&\sqrt{3}b\\-\frac{1}{\sqrt{3}}b&a\end{pmatrix}\ /\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

لاحظ أن : $I=M(1,0)$ و $J=M(0,1)$.

1. أ- لدينا :

✓ $E\neq\varnothing$ ، لأن : $M(0,0)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in E$.

✓ $E\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

✓ ليكن A و B عنصرين من E وليكن $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. إذن : $\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2\ /\ A=M(a,b)$

$\exists(c,d)\in\mathbb{R}^2\ /\ B=M(c,d)$

$$\alpha A+\beta B=\alpha\begin{pmatrix}a&\sqrt{3}b\\-\frac{1}{\sqrt{3}}b&a\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}c&\sqrt{3}d\\-\frac{1}{\sqrt{3}}d&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a+\beta c&\sqrt{3}(\alpha b+\beta d)\\-\frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha b+\beta d)&\alpha a+\beta c\end{pmatrix}$$

$$\alpha A+\beta B=M(\alpha a+\beta c,\alpha b+\beta d)\in E$$

وبالتالي فإن $(E,+,.)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$.

ب- لنبين أن (I,J) أساس في الفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,.)$:

✓ لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$، لدينا : $aI+bJ=a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&\sqrt{3}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0\end{pmatrix}=M(a,b)$. إذن (I,J) أسرة مولدة للفضاء الحقيق E.

✓ (I,J) أسرة حرة في E ، لأن : لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ ، لدينا :

$$aI+bJ=0\Leftrightarrow M(a,b)=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a&\sqrt{3}b\\-\frac{1}{\sqrt{3}}b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow a=b=0$$

وبالتالي فإن (I,J) أساس في الفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,.)$، و $E=\{aI+bJ\ /\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.

2. ليكن $E^* = E \setminus \{M(0,0)\}$. نعتبر التطبيق f المعرف من $\mathbb{C}^*$ نحو E^* بما يلي :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{C}^* & \rightarrow & E^* \\ & a+ib & \mapsto & M(a,b) \end{array}$$

أ- نعتبر $A = aI + bJ$ و $B = cI + dJ$ عنصرين من E.

لدينا : $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

– إذن : $A\times B = (aI+bJ)\times(cI+dJ) = acI + (ad+bc)J + bdJ^2 = (ac-bd)I + (ad+bc)J \in E$.

وبالتالي فإن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

ملاحظة : – $\boxed{M(a,b)\times M(c,d) = M(ac-bd, ad+bc)}$

ب- إذا كان $(a,b)\in\mathbb{R}^2 \ / \ z = a+ib \in \mathbb{C}^*$ ، فإن : $f(z) = M(a,b) \in E^*$. ومنه فإن f تطبيق معرف.

✓ ليكن $(a,b)\in\mathbb{R}^2 \ / \ z = a+ib\in\mathbb{C}^*$ و $(a',b')\in\mathbb{R}^2 \ / \ z' = a'+ib'\in\mathbb{C}^*$. لدينا :

$$f(z\times z') = f\big((aa'-bb') + i(ab'+a'b)\big)$$
$$f(z\times z') = M(aa'-bb', ab'+a'b)$$
$$f(z\times z') = M(a,b)\times M(a',b')$$
$$f(z\times z') = f(z)\times f(z')$$

ومنه فإن f تطبيق تشاكلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$.

✓ نعتبر $A\in E^*$. بما أن (I,J) أساس في الفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,.)$ فإن :

$\exists!(a,b)\in\mathbb{R}^2 \ / \ A = aI+bJ = M(a,b) = f(a+ib)$. ولدينا $A\in E^*$. إذن $a+ib\in\mathbb{C}^*$.

وبالتالي فإن : $\forall A\in E^* \ : \ \exists z\in\mathbb{C}^* \ / \ f(z) = A$. إذن f تطبيق تقابلي.

خلاصة : f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$.

3. لدينا :

✓ $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي . إذن : **$(E,+)$ زمرة تبادلية** .

✓ E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ و $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية . ومنه نستنتج أن :

- القانون $\times$ تجميعي في E .
- القانون $\times$ توزيعي على القانون $+$ في E .
- I هو العنصر المحايد بالنسبة للقانون $\times$ في E .

وهذا يدل على أن **$(E,+,\times)$ حلقة واحدية.**

✓ لدينا f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$ ، إذن :

- القانون $\times$ تبادلي في $\mathbb{C}^*$ ، يستلزم أن القانون $\times$ تبادلي في E^* ، ولدينا $\forall A\in E \ : \ A\times 0 = 0\times A = 0$.

إذن **$\times$ قانون تبادلي في E** .

✓ بما أن $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية و f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$ ، فإن **$(E^*,\times)$ زمرة**.

وبالتالي فإن : **$(E,+,\times)$ جسم تبادلي** .

4. لنحل في E المعادلة $J\times X^{3}=I$. لدينا :

$$J\times X^{3}=I \Leftrightarrow f^{-1}\left(J\times X^{3}\right)=f^{-1}(I)$$

$$J\times X^{3}=I \Leftrightarrow f^{-1}(J)\times\left(f^{-1}(X)\right)^{3}=f^{-1}(I)$$

وبما أن : $f^{-1}(J)=f^{-1}\left(M(0,1)\right)=0+1\times i=i$ و $f^{-1}(I)=f^{-1}\left(M(1,0)\right)=1+0i=1$.

و $f^{-1}(X)=z$ ، فإن المعادلة السابقة تصبح :

$$\begin{aligned}
J\times X^{3}=I &\Leftrightarrow iz^{3}=1\\
&\Leftrightarrow z^{3}=-i\\
&\Leftrightarrow z^{3}=i^{3}\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{z}{i}\right)^{3}=1
\end{aligned}$$

$$J\times X^{3}=I \Leftrightarrow \frac{z}{i}\in\left\{1,j,\bar{j}\right\}$$

حيث $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\bar{j}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. إذن :

$$J\times X^{3}=I \Leftrightarrow z\in\left\{i,ij,i\bar{j}\right\}$$

$$J\times X^{3}=I \Leftrightarrow X=f(z)\in\left\{f(i),f(ij),f(i\bar{j})\right\}$$

ولدينا : $f(i)=M(0,1)=J=\begin{pmatrix}0&\sqrt{3}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0\end{pmatrix}$

و : $f(ij)=f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2\sqrt{3}}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$

و : $f(i\bar{j})=f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة $J\times X^{3}=I$ في E هي :

$$S=\left\{\begin{pmatrix}0&\sqrt{3}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2\sqrt{3}}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\right\}$$

التمريـــــن الثانـــــي : (3,75 نقطة)

ليكن $a\in\mathbb{C}^*$.

I. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(G)\ :\ iz^2+(a+\bar a-i)z\ \ \bar a\ -ia\bar a\ -0$.

1. أ- مميز المعادلة (G) هو :

$$\Delta=b^2-4ac=(a\ \ \bar a\ \ i)^2\ +4i\ (\ \bar a-ia\bar a)\quad - \quad - \quad -$$

$$\Delta=((a-i)\ \ \bar a)^2\ \ 4\bar a(a\ \ i)- \quad -$$

$$\Delta=(a-i)^2\ \ 2\bar a(a\ \ i)\ \ \bar a^2-4\bar a(a+i)\quad - \quad -$$

$$\Delta=(a-i)^2\ \ 2\bar a(a\ \ i)\ \ \bar a^2- \quad +$$

$$\Delta=(a-i\ \ \bar a)^2\ -$$

$$\Delta=(a-\bar a\ \ i)^2\ -$$

ب- مميز المعادلة (G) هو $\Delta=(a-i\ \ \bar a)^2$. إذن للمعادلة (G) حلين عقديين هما :

$z_1=\dfrac{-(a+\bar a\ \ i)\ \ (a\ \ \bar a\ +i)}{2i}=\dfrac{-2\bar a}{2i}\ \ \boxed{i\bar a}$ و $z_2=\dfrac{-(a+\bar a\ \ i)\ \ (a\ \ \bar a\ -i)}{2i}=\dfrac{-2a+2i}{2i}\ \ \boxed{1+ia}$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة (G) هي : $S=\{i\bar a,1+ia\}$.

.2 a حل للمعادلة (G) $\Leftrightarrow a=i\bar a$ أو $a\ \ 1\ \ ia\ \ +$

$$\Leftrightarrow \Re e(a)+i\,\Im m\ a\ (=)\ m\Im a\ \ i(\ )\ a\Re \text{ أو } (a)=\frac{1}{1-i}$$

$$\Leftrightarrow \Re e(a)=\Im m\ a\ (\text{ أو })\ a=\frac{1}{2}(1\ \ i)$$

$$\Leftrightarrow \Re e(a)=\Im m(a)$$

II. المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec u,\vec v)$. نفترض أن : $\Re e(a)\neq \Im m\ a$.

A و B و C نقط ألحاقها على التوالي a و $i\bar a$ و $1+ia$.

1. نضع : $Z=\dfrac{(1+ia)-a}{(i\bar a)-a}$.

أ- لدينا : $\bar Z=\left(\dfrac{(1+ia)-a}{(i\bar a)-a}\right)=\dfrac{(1-i\bar a)-\bar a}{(-ia)-\bar a}=\dfrac{i[(-i-\bar a)\ \ i\bar a]}{i[-a+i\bar a]}\ \ \dfrac{\bar a(i\ \ 1)\ \ i\ -}{i\bar a-a}\ \ =$.

ب- A و B و C نقط مستقيمية $\Leftrightarrow \dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow Z\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow Z=\bar Z$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+ia)-a}{(i\bar{a})-a}=\frac{(i-1)\bar{a}-i}{i\bar{a}-a}$$

$$\Leftrightarrow (1+ia)-a=(i-1)\bar{a}-i$$

$$\Leftrightarrow 1+a(i-1)-(i-1)\bar{a}+i=0$$

$$\Leftrightarrow (i-1)(a-\bar{a})=-(1+i)$$

$$\Leftrightarrow a-\bar{a}=\frac{1+i}{1-i}$$

$$\Leftrightarrow 2i\,\Im m(a)=\frac{(1+i)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2i\,\Im m(a)=i$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Im m(a)=\frac{1}{2}}$$

2. نفترض في هذا السؤال أن : $\Im m(a)\neq\frac{1}{2}$.

<u>تذكير</u> : ليكن $R(\Omega,\theta)$ الدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ وزاويته θ . ولتكن $M(z)$ و $M'(z')$ نقطتين من المستوى العقدي.

$$\boxed{R(\Omega,\theta)(M)=M'\Leftrightarrow z'=e^{i\theta}z+\left(1-e^{i\theta}\right)\omega}$$

نعتبر R_1 الدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ و R_2 الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

نضع : $R_1(B)=B'$ و $R_2(C)=C'$. لتكن النقطة E منتصف القطعة $[BC]$.

أ- لدينا: $R_1(B)=B'$ إذن : $b'=e^{-i\frac{\pi}{2}}b+\left(1-e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)a=-i(i\bar{a})+(1+i)a=\boxed{(1+i)a+\bar{a}}$.

ولدينا: $R_2(C)=C'$ ، إذن : $c'=e^{i\frac{\pi}{2}}c+\left(1-e^{i\frac{\pi}{2}}\right)a=i(1+ia)+(1-i)a=i-a+a-ia=\boxed{i-ia}$

ب- لدينا E منتصف القطعة $[BC]$ إذن : $\frac{i\bar{a}+1+ia}{2}$ $e=aff(E)=\frac{b+c}{2}$.

إذن : $\left(\overline{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{B'C'}}\right)\equiv\arg\left(\frac{c'-b'}{e-a}\right)[2\pi]$.

ولدينا : $\frac{c'-b'}{e-a}=\frac{(i-ia)-(a+ia+\bar{a})}{\frac{i\bar{a}+1+ia}{2}-a}=\frac{i-2ia-a-\bar{a}}{\frac{1+ia+i\bar{a}-2a}{2}}=\frac{2i(1+ia+i\bar{a}-2a)}{1+ia+i\bar{a}-2a}=2i=\left[2,\frac{\pi}{2}\right]$.

إذن: $\boxed{\left(\overline{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{B'C'}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]}$ و $\frac{B'C'}{AE}=\left|\frac{c'-b'}{e-a}\right|=2$. إذن : $\boxed{(B'C')\perp AE}$ و $\boxed{B'C'=2AE}$.

التمريـــــــن الثالث : (3 نقطة)

I. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية : $(E)\ :\ 35u-96v=1$.

1. لدينا : $35\times 11-96\times 4=385-384=1$. إذن $(11,4)$ حل خاص للمعادلة (E) .

2. لدينا : $35\times 11-96\times 4=1$. حسب Bezout، نستنتج أن 96 و 35 أوليان فيما بينهما : $35\wedge 96=1$.

$$\begin{array}{r} 35u-96v=1 \\ 35\times 11-96\times 4=1 \\ \hline \end{array} \quad \ominus$$

$$35(u-11)-96(v-4)=0$$

$$\Leftrightarrow 35(u-11)=96(v-4) \qquad (i)$$
$$\Rightarrow 35/96(v-4)$$
$$\underset{Gauss}{\Rightarrow} 35/v-4$$
$$\Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z}\ /\ v-4=35k \qquad (ii)$$
$$\Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z}\ /\ v=4+35k$$

نعوض نتيجة العلاقة (ii) في العلاقة (i) ، فنجد : $35(u-11)=96\times 35k$. أي : $u-11=96k$ يكافئ $u=11+96k$

وبما أن الأزواج $(11+96k,4+35k)$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$ ، تحقق المعادلة (E) ، فإن مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S=\{(11+96k,4+35k)\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$$

II. نعتبر في المجموعة $\mathbb{N}$ المعادلة التالية : $(F)\ :\ x^{35}\equiv 2[97]$.

1. ليكن x حلا للمعادلة (F) .

أ- لدينا :

97	p	q	r	p^2
	2	48	1	4
	3	32	1	9
	5	19	2	25
	7	13	6	49
	11	8	9	121

stop

إذن 97 عدد أولي . (نتوقف إذا كان $p^2>97$ أو $q<p$)

ليكن $97\wedge x=d$. إذن $d/97$ و 97 عدد أولي ، ومنه فإن : $d=1$ أو $d=97$. نفترض أن : $d=97$.

إذن : $97\wedge x=97$. وعليه فإن : $97/x$ أي : $x\equiv 0[79]$ وهذا يستلزم : $x^{35}\equiv 0[97]$. ولدينا:

$x^{35}\equiv 2[97]$. إذن : $0\equiv 2[97]$ و $0,2\in\{0,1,2,\dots,97\}$. وهذا يشير إلى أن $0=2$. وهذا تناقض.

وبالتالي فإن : $\boxed{97\wedge x=1}$. 97 و x أوليان فيما بينهما.

ب- لدينا : $97\wedge x=1$ و 97 عدد أولي . حسب مبرهنة فيرما ، لدينا : $x^{96}\equiv 1[97]$.

جـ- بما أن : $x^{35}\equiv 2[97]$ ، فإن : $(x^{35})^{11}\equiv 2^{11}[97]$. أي : $x^{385}\equiv 2^{11}[97]$: (i).

ولدينا : $385=96\times4+1$. إذن : $x^{385}=(x^{96})^4\times x$

و لدينا : $x^{96}\equiv 1[97]\Rightarrow (x^{96})^4\equiv 1^4[97]\Rightarrow (x^{96})^4\times x\equiv x[97]\Rightarrow x^{385}\equiv x[97]$: (ii).

من (i) و (ii) نستنتج أن : $\boxed{x\equiv 2^{11}[97]}$.

2. ليكن x عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $x\equiv 2^{11}[97]$. إذن : $x^{35}\equiv 2^{11\times35}[97]$ ومنه فإن $x^{35}\equiv 2^{385}[97]$. أي : $x^{35}\equiv (2^{96})^4\times 2[97]$. وبما أن : 97 أولي و $97\wedge 2=1$ ، فإنه ، حسب مبرهنة فيرما ، لدينا : $2^{96}\equiv 1[97]$.

إذن : $(2^{96})^4\equiv 1[97]$ ومنه نستنتج أن : $x^{35}\equiv 2[97]$. أي : x حل للمعادلة (F) .

3. لدينا : $(F)\Leftrightarrow x\equiv 2^{11}[97]$. وبملاحظة أن : $2^{11}=2048=97\times 21+11$ ، فإن : $2^{11}\equiv 11[97]$.

وبناء عليه فإن : $(F)\Leftrightarrow x\equiv 11[97]\Leftrightarrow (\exists k\in\mathbb{N})\ x=11+97k$.

التمرين الرابع : (10 نقط)

I. لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f(x)=2x-e^{-x^2}$.

وليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}-e^{-x^2}=\lim_{t\to-\infty}-e^{t}=0$ حيث : $t=-x^2$ و $t\xrightarrow[x\to+\infty]{}-\infty$.

ومن نستنتج أن $(\mathscr{C})$ يقبل مقاربا مائلا ، بجوار $+\infty$ ، معادلته $y=2x$.

ب- ليكن $x\in\mathbb{R}^+$. لدينا : $f'(x)=(2x-e^{-x^2})'=2+2xe^{-x^2}=2(1+xe^{-x^2})>0$.

x	$0 \qquad\qquad\qquad\qquad +\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow 0$

جـ- لدينا : f متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$. إذن : f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من المجال $[0,+\infty[$ نحو المجال $f([0,+\infty[)=[f(0),\lim_{x\to+\infty}f(x)[=[-1,0[$.

وبما أن $0\in[-1,0[$ ، فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0,+\infty[$.

ولدينا : $f(0)=-1<0$ و $f(1)=1-e^{-1}=\frac{e-1}{e}>0$. إذن : $f(0)\times f(1)<0$. وحسب مبرهنة القيم الوسيطية ، نستنتج

أن : $\boxed{0<\alpha<1}$.

د- f تزايدية على المجال $[0,1]$. إذن : لكل $x\in[0,1]$ ، لدينا :

$$x\in[0,\alpha[\Rightarrow x<\alpha\Rightarrow f(x)<f(\alpha)\Rightarrow f(x)<0$$

$$x\in]\alpha,1]\Rightarrow \alpha<x\Rightarrow f(\alpha)<f(x)\Rightarrow f(x)>0$$

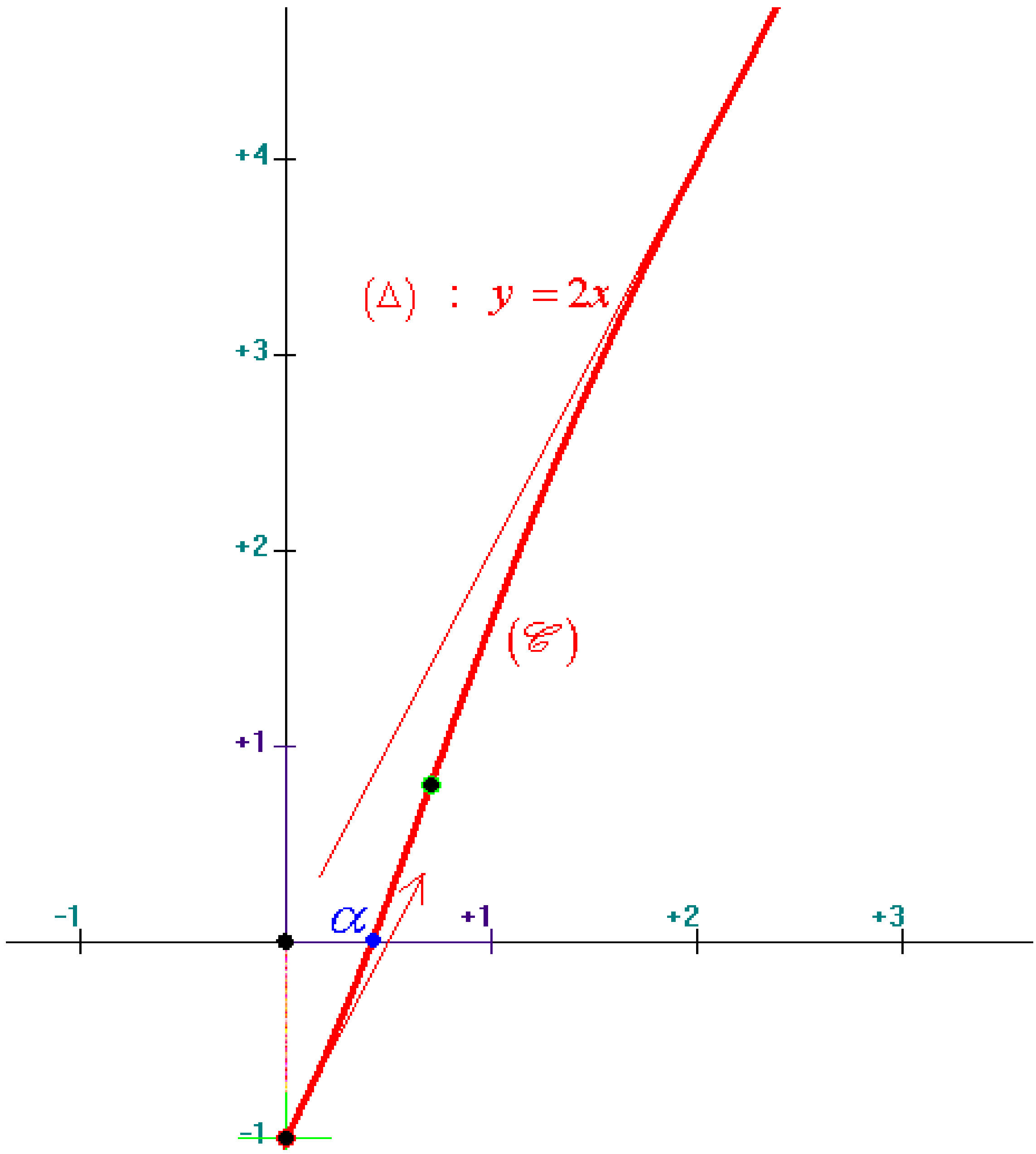
$$f(\alpha)=0$$

وبالتالي فإن :

$$\forall x\in[0,\alpha]\ :\ f(x)\leq 0$$

$$\forall x\in[\alpha,1]\ :\ f(x)\geq 0$$

2. إنشاء المنحنى $(\mathscr{C})$: $\alpha\approx 0,4$



II. نعتبر الدالتين العدديتين φ و g للمتغير الحقيقي x المعرفتين على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$g(x)=x^2-\int_0^x e^{-t^2}dt \quad \text{و} \quad \begin{cases}\varphi(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt \quad ; \quad x>0 \\ \varphi(0)=1\end{cases}$$

1. أ- **الطريقة الأولى :**

ليكن $x>0$. نعتبر الدالة $\zeta : x \mapsto e^{-x^2}$. لدينا : ζ دالة متصلة على المجال $[0,x]$. حسب **خاصية القيمة المتوسطة،**

لدينا : $\exists c \in]0,x[\ / \ \zeta(c)=\dfrac{1}{x-0}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$. أي : $\exists c \in]0,x[\ / \ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt = e^{-c^2}$.

الطريقة الثانية :

نضع : $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$.

F دالة متصلة على $\mathbb{R}^+$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$. ليكن $x \in \mathbb{R}^{+*}$. لدينا : F دالة متصلة على $[0,x]$ وقابلة للاشتقاق على $]0,x[$. حسب مبرهنة التزايدات المنتهية، نستنتج أن : $F(x)-F(0)=F'(c)(x-0) \ / \ \exists c \in]0,x[$.

ولدينا : $F'(u)=e^{-u^2} \ ; \ \forall u \in \mathbb{R}^{+*}$. إذن : $F'(c)=e^{-c^2}$. ومنه فإن : $F(x)=e^{-c^2}x$. أي :

$\int_0^x e^{-t^2}dt = e^{-c^2}x$. وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \ , \ \exists c \in]0,x[\ : \ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt = e^{-c^2}}$.

ب- من أجل $x=1$ ، حسب السؤال السابق ، لدينا : $\exists c \in]0,1[\ / \ \int_0^1 e^{-t^2}dt = e^{-c^2}$. ولدينا :

$0<c<1 \Rightarrow -c^2<0 \Rightarrow e^{-c^2}<1$. إذن : $\int_0^1 e^{-t^2}dt<1$.

2. أ- لدينا : $g(\alpha)=\alpha^2-\int_0^\alpha e^{-t^2}dt=\left[t^2\right]_0^\alpha-\int_0^\alpha e^{-t^2}dt=\int_0^\alpha\left(2t-e^{-t^2}\right)dt=\int_0^\alpha f(t)dt$. $\boxed{g(\alpha)=\int_0^\alpha f(t)dt}$

ب- لدينا : $g(x)=\int_0^x f(t)dt \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}^+$. ولدينا f دالة متصلة على $\mathbb{R}^+$. إذن : g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ و

لدينا : $g'(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)'=f(x) \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}^+$.

جـ- نعلم أن g دالة متصلة على المجال $[\alpha,1]$ و أن : $g'(x)=f(x)>0 \ ; \ \forall x \in]\alpha,1[$ ، إذن g تزايدية قطعا

على المجال $[\alpha,1]$. ولدينا: $g(1)=1^2-\int_0^1 e^{-t^2}dt=1-\int_0^1 e^{-t^2}dt>0$ ، لأن: $\int_0^1 e^{-t^2}dt<1$ ، و $g(\alpha)=\int_0^\alpha f(t)dt$

وحيث أن : $f(t)<0 \ ; \ \forall t \in [0,\alpha[$ ، فإن : $g(\alpha)<0$.

حسب مبرهنة القيم الوسيطية، نستنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]\alpha,1[$.

3. أ- ليكن $x>0$ و $t \in [0,x]$. لدينا :

$$0<t<x \Rightarrow 0<t^2<x^2 \Rightarrow e^{-x^2}<e^{-t^2}<1 \Rightarrow \int_0^x e^{-x^2}dt<\int_0^x e^{-t^2}dt<x \Rightarrow xe^{-x^2}<\int_0^x e^{-t^2}dt<x$$

$$0<t<x \Rightarrow e^{-x^2}<\frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt<1 \Rightarrow e^{-x^2}<\varphi(x)<1$$

بما أن : $\lim_{x\to0^+}e^{-x^2}=1$ و $\lim_{x\to0^+}1=1$ ، فإن : $\boxed{\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=1=\varphi(0)}$.ومنه فإن φ متصلة على اليمين في 0.

ب- ليكن $x>0$. الدالتان $t \mapsto t$ و $t \mapsto e^{-t^2}$ متصلتان وقابلتان للاشتقاق على المجال $[0,x]$ و دالتاهما المشتقتان $t \mapsto 1$ و

$t \mapsto -2te^{-t^2}$ متصلتان على المجال $]0,x[$. حسب تقنية المكاملة بالأجزاء ، لدينا :

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt=\frac{1}{x}\int_0^x t'\,e^{-t^2}dt=\frac{1}{x}\left(\left[te^{-t^2}\right]_0^x-\int_0^x t\left(-2te^{-t^2}\right)dt\right)$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}\left(xe^{-x^2}+2\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\right)=e^{-x^2}+\frac{2}{x}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$$

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\ :\ \varphi(x)=e^{-x^2}+\frac{2}{x}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt}$

جـ- بما أن $t\mapsto t^2e^{-t^2}$ دالة متصلة على $\mathbb{R}^+$، فإن الدالة $x\mapsto\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$، ولدينا :

$$\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\ :\ \left(\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\right)'=x^2e^{-x^2}$$

وبما أن الدالتين $x\mapsto\frac{2}{x}$ و $x\mapsto e^{-x^2}$ قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$، فإن الدالة φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$ ولكل x من $\mathbb{R}^{+*}$،

لدينا : $\varphi'(x)=\left(e^{-x^2}+\frac{2}{x}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\right)'=-2xe^{-x^2}+\left(\frac{2}{x}\right)'\int_0^x t^2e^{-t^2}dt+\frac{2}{x}\left(\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\right)'$

$$\varphi'(x)=-2xe^{-x^2}-\frac{2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt+\frac{2}{x}\left(x^2e^{-x^2}\right)=-\frac{2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$$

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\ :\ \varphi'(x)=-\frac{2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt}$

د- نعلم أن φ دالة متصلة على المجال $[0,1]$ وأن $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\ :\ \varphi'(x)=-\frac{2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt<0$، إذن φ تناقصية قطعا على المجال $[0,1]$ إذن $\varphi([0,1])=[\varphi(1),\varphi(0)]=[\varphi(1),1]\subset[0,1]$ لأن $\varphi(1)>e^{-1^2}>0$ (أنظر: 3- أ-)

خلاصة : $\boxed{\varphi([0,1])\subset[0,1]}$

4. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}^+$. وليكن $t\in[0,x]$. لدينا :

$$-t^2\le 0\Rightarrow e^{-t^2}\le 1\Rightarrow t^2e^{-t^2}\le t^2\Rightarrow\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\le\int_0^x t^2dt\Rightarrow\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\le\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x$$

$$\Rightarrow\boxed{\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\le\frac{x^3}{3}}$$

ب- لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\ :\ |\varphi'(x)|=\frac{2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$ و $\forall x\in\mathbb{R}^+\ :\ \int_0^x t^2e^{-t^2}dt\le\frac{x^3}{3}$.

إذن : $\forall x\in]0,1[\ :\ |\varphi'(x)|\le\frac{2}{x^2}\times\frac{x^3}{3}\le\frac{2}{3}x\le\frac{2}{3}$.

جـ- ليكن $x\in\mathbb{R}^{+*}$. لدينا : $g(x)=0\Leftrightarrow\int_0^x e^{-t^2}dt-x^2=0\Leftrightarrow\int_0^x e^{-t^2}dt=x^2\Leftrightarrow\frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt=x\Leftrightarrow\varphi(x)=x$.

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\ :\ \varphi(x)=x\Leftrightarrow g(x)=0}$.

5. نعتبر المتتالية العددية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=\dfrac{2}{3} \\ u_{n+1}=\varphi\left(u_n\right) \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ- من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=\dfrac{2}{3}$. إذن : $0\le u_0\le 1$.

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$. نفترض أن $0\le u_n\le 1$ ونبين أن $0\le u_{n+1}\le 1$:

لدينا : $\varphi\left(\left[0,1\right]\right)\subset\left[0,1\right]$. إذن : $0\le\varphi(x)\le 1 \;\;:\;\; \forall x\in\left[0,1\right]$. وبما أن $0\le u_n\le 1$ ، فإن $0\le u_{n+1}\le 1$.

✓ وبالتالي فإنه حسب مبدأ الترجع ، لدينا : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \;\;:\;\; 0\le u_n\le 1}$.

ب- ليكن x من المجال $\left[0,1\right]$ ، نعتبر المجال $\left[a,b\right]$ حيث $a=\min(x,\beta)$ و $b=\max(x,\beta)$. لدينا : φ دالة متصلة على المجال $\left[a,b\right]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $\left]a,b\right[$. حسب مبرهنة التزايدات المنتهية ، يوجد على الأقل عدد حقيقي c بحيث :

$a<c<b$ و $\varphi(x)-\varphi(\beta)=\varphi'(c)(x-\beta)$. أي : $\varphi(x)-\varphi(\beta)=\varphi'(c)(x-\beta)$.

ولدينا : $g(\beta)=0$. إذن : $\varphi(\beta)=\beta$. ومنه فإن : $\varphi(x)-\beta=\varphi'(c)(x-\beta)$.

وبما أن : $0<a<c<b<1$ ، فإن : $\left|\varphi'(c)\right|\le\dfrac{2}{3}$. ثم نحصل على : $\left|\varphi(x)-\beta\right|=\left|\varphi'(c)\right|\left|x-\beta\right|\le\dfrac{2}{3}\left|x-\beta\right|$.

إذن : $\boxed{\forall x\in\left[0,1\right] \;\;:\;\; \left|\varphi(x)-\beta\right|\le\dfrac{2}{3}\left|x-\beta\right|}$.

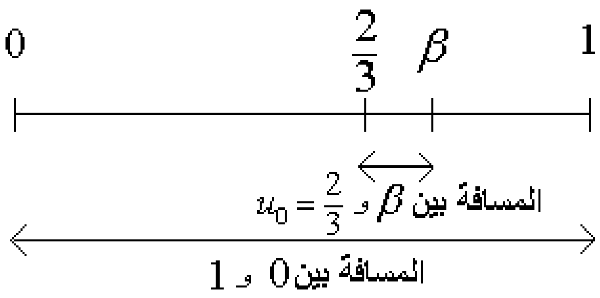
ليكن $n\in\mathbb{N}$. لدينا : $u_n\in\left[0,1\right]$. إذن : $\left|\varphi(u_n)-\beta\right|\le\dfrac{2}{3}\left|u_n-\beta\right|$. أي : $\left|u_{n+1}-\beta\right|\le\dfrac{2}{3}\left|u_n-\beta\right|$.

ومنه فإن : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \;\;:\;\; \left|u_{n+1}-\beta\right|\le\dfrac{2}{3}\left|u_n-\beta\right|}$. ولدينا :

$$\times\begin{array}{l}
\left|u_1-\beta\right|\le\dfrac{2}{3}\left|u_0-\beta\right| \\
\left|u_2-\beta\right|\le\dfrac{2}{3}\left|u_1-\beta\right| \\
\vdots \\
\left|u_{n-1}-\beta\right|\le\dfrac{2}{3}\left|u_{n-2}-\beta\right| \\
\left|u_n-\beta\right|\le\dfrac{2}{3}\left|u_{n-1}-\beta\right| \\
\hline
\left|u_n-\beta\right|\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\left|u_0-\beta\right|
\end{array}$$

وذلك بعد ضرب طرفي المتفاوتات السابقة، على التوالي، طرفا بطرف ، وبعد الاختزال

ولدينا : $$|u_0-\beta| = \left|\frac{2}{3}-\beta\right| \le |1-0| \le 1$$



وبالتالـــــي فإن : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad |u_n-\beta| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

و نتحقق من هذه العبارة بالترجع.

جـ- لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad |u_n-\beta| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ و $-1<\frac{2}{3}<1$. إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$. وحسب مصاديق التقارب، فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها β . $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\beta}$.

C: RS24

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم العالي
وتكوين الأطر
والبحث العلمي
كتابة الدولة المكلفة بالتعليم المدرسي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
-الدورة الاستدراكية 2008-
الموضوع

9	المعامل:	الرياضيات	المــــادة:
4س	مدة الإنجاز:	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعــب(ة):

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة

التمرين الأول:(3,5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر التطبيق r الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M_1(z_1)$ حيث : $z_1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}z+\frac{\sqrt{3}+i}{2}$

و التطبيق h الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M_2(z_2)$ حيث : $z_2=-2z+3i$ و نضع $F=h\circ r$

1 ن 1) حدد طبيعة كل من التطبيقين r و h وعناصرهما المميزة .

2) نعتبر النقطتين $\Omega(i)$ و $A(a)$ حيث a عدد عقدي معلوم مخالف للعدد i .

ونضع: $B=F(A)$ و $C=F(B)$ و $D=F(C)$

0,5 ن أ) بين أنه إذا كانت النقطة $M'(z')$ هي صورة النقطة $M(z)$ بالتطبيق F فإن :

$$z'-i=2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z-i)$$

0,25ن ب) تحقق أن Ω هي النقطة الوحيدة التي تحقق : $F(\Omega)=\Omega$

0,75ن 3) أ) حدد بدلالة العدد العقدي a الأعداد العقدية b و c و d ألحاق النقط B و C و D على التوالي.

0,25ن ب) بين أن النقط Ω و A و D مستقيمية.

0,5ن ج) بين أن Ω هو مرجح النظمة المتزنة $\{(B,4);(C,2);(D,1)\}$

0,25ن د) حدد مجموعة النقط $A(a)$ لكي تكون النقطة D تنتمي إلى المحور الحقيقي.

التمرين الثاني:(4 نقط)

نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي :

$$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\ ;\ x*y=x+y-3xy$$

0,25ن 1) أ) تحقق أن : $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\ ;\ (1-3x)(1-3y)=1-3(x*y)$

0,75ن ب)بين أن $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$ زمرة تبادلية.

0,5ن 2) أ) بين أن التطبيق φ الذي يربط كل عدد حقيقي x بالعدد الحقيقي

$\varphi(x)=1-3x$ تشاكل تقابلي من $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$ نحو $\left(\mathbb{R}^*,\times\right)$

0,25ن ب) بين أن : $\varphi^{-1}\left(\mathbb{R}_+^*\right)=\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$

0,5ن ج) بين أن $\left(\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[,*\right)$ زمرة جزئية للزمرة $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$

3) لكل x من المجموعة $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ و لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $x^{(0)}=0$

و $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,x^{(n+1)}=x^{(n)}*x$

0,25ن أ) بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}\right);\,(\forall n\in\mathbb{N})\quad;\,\varphi\left(x^{(n)}\right)=\left(\varphi(x)\right)^n$

0,5ن ب) استنتج $x^{(n)}$ بدلالة x و n .

4) نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي T المعرف بما يلي :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\;;\;xTy=x+y-\frac{1}{3}$$

0,5ن أ) بين أن : $(\mathbb{R},T)$ زمرة تبادلية .

0,5ن ب) بين أن : $(\mathbb{R},T,*)$ جسم تبادلي.

التمرين الثالث:(2,5نقط)

يحتوي صندوق على أربع كرات:كرة بيضاء و ثلاث كرات حمراء غير قابلة للتمييز باللمس .

نسحب عشوائيا كرة من الصندوق ,نسجل لونها ,ثم نعيدها إلى الصندوق.

نجري نفس التجربة لمرات متتابعة إلى أن نحصل لأول مرة على كرتين متتابعتين من نفس اللون و نوقف التجربة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي رتبة السحبة التي توقفت فيها التجربة.

1ن 1) احسب احتمال كل حدث من الحدثين التاليين : $[X=2]$ و $[X=3]$

2) ليكن k عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

0,75ن أ)بين أن احتمال الحدث $[X=2k]$ هو $p_{2k}=\frac{5}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$

0,75ن ب)بين أن احتمال الحدث $[X=2k+1]$ هو $p_{2k+1}=\left(\frac{3}{16}\right)^{k}$

التمرين الرابع:(10 نقط)

I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I=\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{x} & ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

0,5 1) بين أن الدالة f متصلة في الصفر .

2) لكل عدد حقيقي غير منعدم a من المجال I نعتبر الدالة العددية h_a للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال I بما يلي: $h_a(x)=\left(\ln(1+2a)-2a\right)x^2-\left(\ln(1+2x)-2x\right)a^2$

أ)احسب $h_a(0)$ و $h_a(a)$ ثم استنتج أنه يوجد عدد حقيقي b محصور بين 0 و a بحيث:

0,5 $$\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\frac{-2}{1+2b}$$

0,75 ب)استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق في الصفر و أن : $f'(0)=-2$.

0,5 3) أ)بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $I\setminus\{0\}$

و أن: $(\forall x\in I\setminus\{0\})\ ;\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(1+2x)}$ حيث: $g(x)=2x-(1+2x)\ln(1+2x)$

0,5 ب)بين أن : $(\forall x\in I\setminus\{0\})\ ;\ g(x)<0$

0,25 ج)استنتج تغيرات الدالة f على المجال I .

0,5 4) أ)احسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ x>-\frac{1}{2}}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أول هندسيا النتيجتين المحصل عليهما.

0,5 ب)بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1,2]$ بحيث : $f(\alpha)=1$

0,5 ج)أنشئ المنحنى (C) (نأخذ : $\alpha \approx 1,3$)

II - 1) نضع : $J=[1,\alpha]$ و $\varphi(x)=\ln(1+2x)$ $(\forall x\in I)$.

0,5 أ) بين الدالة φ قابلة للاشتقاق على المجال I و أن : $0<\varphi'(x)\le\dfrac{2}{3}$; $(\forall x\ge 1)$

0,75 ب) تحقق أن : $\varphi(\alpha)=\alpha$ و أن : $\varphi(J)\subset J$

2) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $u_0=1$ و $u_{n+1}=\ln(1+2u_n)$; $(\forall n\ge 0)$

0,5 أ)بين أن : $u_n\in J$; $(\forall n\ge 0)$

0,5 ب)بين أن : $|u_n-\alpha|\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$; $(\forall n\ge 0)$

0,5 ج)استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها.

III-نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال I بما يلي: $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

0,5 1) أ)بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال I ثم أحسب $F'(x)$

0,25 ب)استنتج منحى تغيرات الدالة F على المجال I .

0,5 2) أ) بين أن : $F(x)\ge\int_1^x\dfrac{\ln(1+2t)}{1+2t}dt$; $(\forall x\ge 1)$

0,5 ب) استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$

3) نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ على اليمين في $-\dfrac{1}{2}$

ونعتبر الدالة $\tilde{F}$ المعرفة على المجال $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ بما يلي:
$$\begin{cases}\tilde{F}(x)=F(x)\ ;\ x\in I\\ \tilde{F}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\ell\end{cases}$$

0,5 أ) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن : $F(x)-\ell\ge f(x)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$; $(\forall x\in I)$

0,5 ب) استنتج أن الدالة $\tilde{F}$ غير قابلة للاشتقاق على اليمين في $-\dfrac{1}{2}$

ثانوية محمد الخامس – القنيطرة - الأستاذ محمد غريز http://mathkas.ici.ma	**تصحيح الامتحان الوطني الموحد للباكلوريا** الدورة - الاستدراكية - 2008	الثانية علوم رياضية أ و ب

التمرين الأول :

1 - ليكن r التطبيق الذي يربط كل نقطة M(z) بالنقطة $M_1(z_1)$ حيث : $z_1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}z+\frac{\sqrt{3}+i}{2}$

لدينا : $\left|\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right|=1$ و $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\neq 1$

اذن r دوران مركزه Ω ذات اللحق $\omega=\frac{\frac{\sqrt{3}+i}{2}}{1-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}$ أي $\omega=\frac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}$ أي $\omega=\frac{(\sqrt{3}+i)(1+i\sqrt{3})}{4}=i$

و زاويته $\theta\equiv\arg(\frac{1+\sqrt{3}i}{2})\ [2\pi]$

$$\theta\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

ليكن h التطبيق الذي يربط النقطة M(z) بالنقطة $M_2(z_2)$ حيث $z_2=-2z+3i$

لدينا $-2\in\mathbb{R}^*-\{1\}$ اذن h تحاكي مركزه Ω(i) ونسبته -2.

2 – أ - لتكن M'(z') هي صورة M(z) بالتطبيق F

لدينا F=hor

$$M\xrightarrow{r}M_1\xrightarrow{h}M'$$

$$z\longrightarrow z_1\longrightarrow z'$$

لدينا $z_1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ و $z'=-2z_1+3i$ اذن $z'=-2((\frac{1+\sqrt{3}i}{2})z+\frac{\sqrt{3}+i}{2})+3i$

اذن $z'=-(1+i\sqrt{3})z-\sqrt{3}+2i$ أي $z'-i=-(1+i\sqrt{3})z-\sqrt{3}+i$

أي $z'-i=-(1-i\sqrt{3})z+i(1-i\sqrt{3})$ أي $z'-i=-(1+i\sqrt{3})(z-i)$

و بما أن $2e^{i\frac{4\pi}{3}}=-(1+i\sqrt{3})$

فإن $\boxed{z'-i=2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z-i)}$

ب – لدينا $z'-i=2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z-i)$

من أجل z=i لدينا z'=i

اذن Ω هي النقطة الوحيدة التي تحقق $F(\Omega)=\Omega$

3 – أ – لدينا B=F(A)

اذن $b-i=2e^{i\frac{4\pi}{3}}(a-i)$ أي $b=2e^{i\frac{4\pi}{3}}a-2ie^{i\frac{4\pi}{3}}+i$

و بما أن $-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ فان $\boxed{b=2e^{i\frac{4\pi}{3}}a+2e^{i\frac{5\pi}{6}}+i}$

لدينا C=F(B)

اذن $c-i=2e^{i\frac{4\pi}{3}}(2e^{i\frac{4\pi}{3}}a+2e^{i\frac{5\pi}{6}})$

اذن $\boxed{c=4e^{i\frac{2\pi}{3}}a+4e^{i\frac{\pi}{6}}+i}$

لدينا $D=F(C)$

اذن $d-i=2e^{i\frac{4\pi}{3}}(4e^{i\frac{2\pi}{3}}+4e^{i\frac{\pi}{6}})$

أي $d=8e^{i2\pi}a+8e^{i\frac{3\pi}{2}}+i$

أي $d=8a-8i+i$ و منه $\boxed{d=8a-7i}$

ب – لنبين أن النقط Ω و A و D مستقيمية.

لدينا $\dfrac{d-i}{a-i}=\dfrac{8a-7i-i}{a-i}=\dfrac{8(a-i)}{a-i}$

اذن $\dfrac{d-i}{a-i}=8$

بما أن $\dfrac{d-i}{a-i}$ عدد حقيقي فان النقط Ω و A و D مستقيمية.

ج – لنبين أن Ω مرجح النظمة المتزنة $\{(B,4);(C,2);(D,1)\}$

أي $4\overrightarrow{\Omega B}+2\overrightarrow{\Omega C}+\overrightarrow{\Omega D}=\vec{0}$

لدينا $4(b-i)+2(c-i)+d-i=8e^{i\frac{4\pi}{3}}a+8e^{i\frac{5\pi}{6}}+8e^{i\frac{2\pi}{3}}a+8e^{i\frac{\pi}{6}}+8a-8i$

$$=8a(1+e^{i\frac{2\pi}{3}}+e^{i\frac{4\pi}{3}})+8(e^{i\frac{5\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{6}}-i)$$

$$=8a(1+e^{i\frac{2\pi}{3}}+e^{-i\frac{2\pi}{3}})+8(e^{i\frac{\pi}{2}}(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}})-i)$$

$$=8a(1+2\cos\frac{2\pi}{3})+8(i.2\cos\frac{\pi}{3}-i)$$

$$=8a(1+2(-\frac{1}{2}))+8(2i\frac{1}{2}-i)=0$$

و بالتالي Ω هو مرجح النظمة المتزنة $\{(B,4);(C,2);(D,1)\}$

د - $D\in(O,\vec{u})\Leftrightarrow d=\bar{d}$

$$\Leftrightarrow 8a-7i=8\bar{a}+7i$$

$$\Leftrightarrow 8(a-\bar{a})-14i=0$$

$$\Leftrightarrow 16\,\mathrm{Im}\,a\,i-14i=0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Im}\,a=\frac{7}{8}$$

إذن مجموعة النقط $A(a)$ هي المستقيم ذو المعادلة $y=\dfrac{7}{8}$

التمرين الثاني :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad x*y=x+y-3xy$$

1 – أ - لنبين أن $(1-3x)(1-3y)=1-3(x*y)$

أي $3(x*y)=1-(1-3x)(1-3y)$

لدينا $x*y=x+y-3xy$ اذن $3(x*y)=3x+3y-9xy$

أي $3(x*y)=1-(1-3x-3y+9xy)$

أي $1-3x-3y+9xy=1-3(x*y)$ ومنه $(1-3x)(1-3y)=1-3(x*y)$

ب - $x*y=x+y-3xy=y+x-3yx=y*x \qquad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$

اذن * تبادلي .

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \qquad x*(y*z)=(x*y)*z$$

اذن * تجميعي .

$$(\forall x\in\mathbb{R}) \qquad x*e=x\Leftrightarrow x+e-3xe=x$$

$$\Leftrightarrow(\forall x\in\mathbb{R}) \quad e(1-3x)=0$$

$$\Leftrightarrow e=0 \text{ أو } 1-3x=0$$

$1-3x=0$ غير ممكن لكل x من $\mathbb{R}$ إذن 0 هو العنصر المحايد للقانون *.

x يقبل مماثلا في $(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\},*)$ يعني يوجد x' في $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ بحيث $x*x'=0$

$$x*x'=0 \Leftrightarrow x+x'-3xx'=0$$
$$\Leftrightarrow x'(1-3x)=-x$$
$$\Leftrightarrow x'=\frac{-x}{1-3x} \quad (\text{لان } x\neq\frac{1}{3})$$

و بالتالي $(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\},*)$ زمرة تبادلية

2 – أ - $\varphi(x)=1-3x$

لدينا $\varphi(x*y)=1-3(x*y) \qquad \forall(x,y)\in(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\})^2$

اذن $=(1-3x)(1-3y)$

أي $\varphi(x*y)=\varphi(x)\times\varphi(y)$

اذن φ تشاكل من $(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\},*)$ نحو $(\mathbb{R}^*,\times)$

$$(\forall y\in\mathbb{R}^*) \qquad (\exists! x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\})/\ y=\varphi(x)\ ?$$

$$y=\varphi(x)\Leftrightarrow y=1-3x$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1-y}{3}$$

لنبين أن $x\neq\frac{1}{3}$

نفترض أن $x=\frac{1}{3}$

$\frac{1-y}{3}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow y=0$ (تناقض مع كون $y\neq 0$)

إذن φ تقابل من $(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\},*)$ نحو $(\mathbb{R}^*,\times)$

ب - $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)=\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[\Leftrightarrow \varphi(\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[)=\mathbb{R}^{*+}$

(لان φ تناقصية) $\varphi(x)>\varphi(\frac{1}{3}) \qquad \forall x\in\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$

$$\varphi(x)\geq 0$$

إذن $\varphi(\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[)\subset\mathbb{R}^{*+}$ (1)

ليكن y عنصرا من $\mathbb{R}^{*+}$

هل يوجد x من $\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$ بحيث : $\varphi(x)=y$ ؟

$$y=\varphi(x)\Leftrightarrow y=1-3x$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1-y}{3}$$

لدينا $y>0$ ا ذن $-y<0$ اذن $1-y<1$

أي $\frac{1-y}{3}<\frac{1}{3}$ أي $x<\frac{1}{3}$

اذن $\mathbb{R}^{*+}\subset\varphi(\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[)$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $\varphi(\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[) = \mathbb{R}^{*+}$ وبالتالي $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^{*+}) = \left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$

ج – لدينا $\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[\subset \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$

و $\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[\neq \varnothing$ لان $0 \in \left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$

ليكن x و y عنصران من $\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$

لدينا $x*y' = x*(\frac{-y}{1-3y})$

اذن $= x - \frac{y}{1-3y} - 3x(\frac{-y}{1-3y})$

أي $= \frac{x-3xy-y+3xy}{1-3y}$

أي $x*y' = \frac{x-y}{1-3y}$

لدينا $\frac{1}{3} - \frac{x-y}{1-3y} = \frac{1-3y-3x+3y}{3(1-3y)} = \frac{1-3x}{3(1-3y)}$

و بما أن $x < \frac{1}{3}$ و $y < \frac{1}{3}$ فان $1-3x > 0$ و $1-3y > 0$

اذن $\frac{1-3x}{3(1-3y)} > 0$ أي $\frac{x-y}{1-3y} < \frac{1}{3}$ اذن $x*y' \in \left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$

و بالتالي $(\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\},*)$

3 – أ – من أجل n=0 لدينا $\varphi(x^{(0)}) = \varphi(0) = 1$ و $(\varphi(x))^0 = 1$

اذن $\varphi(x^{(0)}) = (\varphi(x))^0$

نفترض أن $\varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^n$

و نبين أن $\varphi(x^{(n+1)}) = (\varphi(x))^{n+1}$

لدينا $\varphi(x^{(n+1)}) = \varphi(x^n * x)$

(لان φ تشاكل) $= \varphi(x^n)\times\varphi(x)$

أي $= (\varphi(x))^n \times \varphi(x)$

و منه $\varphi(x^{(n+1)}) = (\varphi(x))^{n+1}$

ب - $\varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^n \Leftrightarrow x^{(n)} = \varphi^{-1}((\varphi(x)^n)$

$\Leftrightarrow x^{(n)} = \varphi^{-1}((1-3x)^n)$

$\Leftrightarrow \boxed{x^{(n)} = \frac{1-(1-3x)^n}{3}}$

4 – ليكن T قانون التركيب الداخلي المعرف على $\mathbb{R}$ بما يلي : $xTy = x+y-\frac{1}{3}$ $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)$

أ - $xTy = x+y-\frac{1}{3}$ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$= y+x-\frac{1}{3}$

$xTy = yTx$

إذن T تبادلي.

لدينا $(xTy)Tz=(x+y-\frac{1}{3})Tz \qquad \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

اذن $=x+y+z-\frac{2}{3}$

لدينا $xT(yTz)=xT(y+z-\frac{1}{3})$

اذن $=x+y+z-\frac{2}{3}$

اذن $(xTy)Tz=xT(yTz)$ لكل (x,y,z) من $\mathbb{R}^3$

اذن T تجميعي .

لدينا $xT\frac{1}{3}=x+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=x \qquad (\forall x\in\mathbb{R})$

اذن $\frac{1}{3}$ هو العنصر المحايد للقانون T

x يقبل مماثلا في $(\mathbb{R},T)$ يعني يوجد x' في E بحيث :

$xTx'=\frac{1}{3}$ (هذه العلاقة كافية لان T تبادلي)

$$xTx'=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x+x'-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x'=\frac{2}{3}-x}$$

اذن كل عنصر من $\mathbb{R}$ له مماثل في $(\mathbb{R},T)$. و بالتالي : $(\mathbb{R},T)$ زمرة تبادلية.

ب – لدينا $(\mathbb{R},T)$ زمرة تبادلية و $(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\},*)$ زمرة تبادلية

لنبين أن * توزيعي بالنسبة للقانون T

أي $x*(yTz)=(x*y)T(x*z) \qquad \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ (هذه العلاقة كافية لان * تبادلي)

لدينا $x*(yTz)=x*(y+z-\frac{1}{3})$

اذن $=x+y+z-\frac{1}{3}-3x(y+z-\frac{1}{3})$

اذن $\boxed{x*(yTz)=2x+y+z-3xy-3xz-\frac{1}{3}} \quad (1)$

لدينا $(x*y)T(x*z)=(x+y-3xy)T(x+z-3xz)$

اذن $(x*y)T(x*z)=x+y-3xy+x+z-3xz-\frac{1}{3}$

$\boxed{(x*y)T(x*z)=2x+y+z-3xy-3xz-\frac{1}{3}} \quad (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن * توزيعي بالنسبة للقانون T .

و بالتالي : $(\mathbb{R},T,*)$ جسم تبادلي.

التمرين الثالث :

لدينا كرة بيضاء و ثلاث كرات حمراء

نسحب عشوائيا كرة من الصندوق نسجل لونها ثم نعيدها الى الصندوق

X = رتبة السحبة التي توقفت فيها التجربة

1 – (X=2) يعني سحب كرتين بيضاوتين أو كرتين حمراوين أي BB أو RR

اذن $p(X=2)=(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4})+(\frac{3}{4}\times\frac{3}{4})$

$$p(X=2)=\frac{1}{16}+\frac{9}{16}$$

اذن $p(X=2)=\frac{5}{8}$

$(X=3)$ يعني سحب BRR أو RBB

إذن $p(X=3)=(\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4})+(\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4})$

$$p(X=3)=\frac{9}{64}+\frac{3}{64}$$

$$p(X=3)=\frac{3}{16}$$

2 – ليكن $k\in\mathbb{N}^*$

أ - $(X=2k)$ يعني سحب (BRBRB...............BRBB)

$$\begin{array}{ccc} 2k\text{-}2 & 2k\text{-}1 & 2k \end{array}$$

أو (RBRB...............RBRR)

$$\begin{array}{ccc} 2k\text{-}2 & 2k\text{-}1 & 2k \end{array}$$

إذن $p_{2k}=(\frac{1}{4})^{k-1}.(\frac{3}{4})^{k-1}.(\frac{1}{4})^{2}+(\frac{3}{4})^{k-1}.(\frac{1}{4})^{k-1}.(\frac{3}{4})^{2}$

أي $=(\frac{1}{4})^{k+1}.(\frac{3}{4})^{k-1}+(\frac{3}{4})^{k+1}.(\frac{1}{4})^{k-1}$

أي $=(\frac{1}{4})^{k-1}.(\frac{3}{4})^{k-1}((\frac{1}{4})^{2}+(\frac{3}{4})^{2})$

إذن $=(\frac{3}{16})^{k-1}\times\frac{10}{16}$

ومنه $p_{2k}=\frac{5}{8}(\frac{3}{16})^{k-1}$

ب – $(X=2k+1)$ يعني سحب :

(BRBRB...............BRBRR)

$$\begin{array}{cccc} 2k\text{-}2 & 2k\text{-}1 & 2k & 2k+1 \end{array}$$

أو (RBRB...............BRBB)

$$\begin{array}{cccc} 2k\text{-}2 & 2k\text{-}1 & 2k & 2k+1 \end{array}$$

اذن $p_{2k+1}=(\frac{1}{4})^{k}(\frac{3}{4})^{k-1}(\frac{3}{4})^{2}+(\frac{3}{4})^{k}(\frac{1}{4})^{k-1}(\frac{1}{4})^{k}$

أي $p_{2k+1}=(\frac{1}{4})^{k}(\frac{3}{4})^{k+1}+(\frac{3}{4})^{k}(\frac{1}{4})^{k+1}$

$$=(\frac{1}{4})^{k}(\frac{3}{4})^{k}(\frac{3}{4}+\frac{1}{4})$$

$$=(\frac{1}{4})^{k}(\frac{3}{4})^{k}$$

$$\boxed{p_{2k+1}=(\frac{3}{16})^{k}}$$

التمرين الرابع :

لتكن f الدالة المعرفة على $I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$

1 - $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} .2$

$= 1 \times 2 = 2 = f(0)$

إذن f متصلة في $x_0 = 0$

2 - $a \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ $(a \neq 0)$

أ – لتكن $h_a(x) = (\ln(1+2a) - 2a)x^2 - (\ln(1+2x) - 2x)a^2$

لدينا $h_a(0) = 0$ و $h_a(a) = 0$

h_a متصلة على المجال المغلوق الذي طرفاه 0 و a

و ق . ش على المجال المفتوح الذي طرفاه 0 و a

اذن حسب مبرهنة رول Rolle يوجد عدد حقيقي b محصور بين 0 و a بحيث : $h_a'(b) = 0$

لدينا $h'_a(x) = 2(\ln(1+2a) - 2a)x - (\frac{2}{1+2x} - 2)a^2$

$h'_a(b) = 0 \Leftrightarrow (\ln(1+2a) - 2a)b = (\frac{1}{1+2b} - 1)a^2$

$\Leftrightarrow \frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2b}{b(1+2b)}$

$\Leftrightarrow \frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$

ب - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2}$

حسب س - أ - $\frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} = \frac{-2}{1+2b}$ بحيث : b محصور بين 0 و x

اذا كان $(x > 0)$ فان $0 < b < x$

إذن $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} = \lim\limits_{b\to 0^+} \frac{-2}{1+2b} = -2$

اذن f ق . ش على يمين 0 و $f'_d(0) = -2$

اذا كان $(x < 0)$ فان $x < b < 0$

اذن $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{b\to 0^-} \frac{-2}{1+2b} = -2$

اذن f ق . ش على يسار 0 و $f'_g(0) = -2$

و بالتالي f ق . ش في 0 و $\boxed{f'(0) = -2}$

3 – أ – الدالة f ق .ش على $I - \{0\}$ لأنها مركب و خارج دالتين ق ش على $I - \{0\}$

لدينا $f'(x) = \frac{\frac{2}{1+2x}x - \ln(1+2x)}{x^2}$ $(\forall x \in I - \{0\})$

اذن $f'(x) = \frac{2x - (1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}$

أي $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$

بحيث : $g(x) = 2x - (1+2x)\ln(1+2x)$

ب – لدينا $g'(x) = 2 - 2\ln(1+2x) - \frac{(1+2x)2}{(1+2x)}$ $\quad (\forall x \in I)$

إذن $g'(x) = -2\ln(1+2x)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1+2x = 1$$
$$\Leftrightarrow x = 0$$
$$x > 0 \Leftrightarrow 1+2x > 1$$
$$\Leftrightarrow \ln(1+2x) > 0$$
$$\Leftrightarrow -\ln(1+2x) < 0$$
$$\Leftrightarrow g'(x) < 0$$

X	-1/2		0		$+\infty$
g'(x)	||	+	0	-	
g(x)	||	↗	0	↘	

من خلال جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن : g تقبل قيمة قصوى عند 0 و هي g(0)=0

اذن $g(x) < 0$ $\quad (\forall x \in I - \{0\})$

ج - لكل x من I : $1+2x > 0$

اذن اشارة f'(x) هي اشارة g(x)

و بما أن g(x)<0 لكل x من $I - \{0\}$

فان f'(x)<0 اذن f تناقصية قطعا على I

4 - أ - $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2}}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2}}} \frac{\ln(1+2x)}{x}$

$$= \frac{-\infty}{-\frac{1}{2}} = +\infty$$

اذن المستقيم ذو المعادلة $x = -\frac{1}{2}$ مقارب للمنحنى (C)

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x}$

اذن $= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{(1+2x)} \times \frac{(1+2x)}{x}$

$$= 0 \times 2 = 0$$

اذن المستقيم ذو المعادلة y=0 مقارب للمنحنى (C) بجوار $(+\infty)$

ب – لتكن $h(x) = f(x) - 1$

h متصلة على $[1,2]$

$$h'(x) = f'(x) < 0 \quad (\forall x \in [1,2])$$

اذن h تناقصية قطعا على $[1,2]$

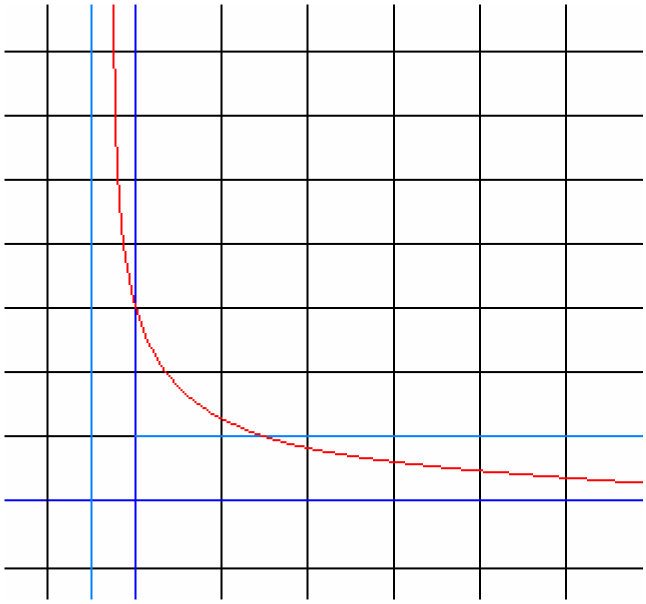
لدينا $h(1) = f(1) - 1$ و $h(2) = \frac{\ln 5}{2} - 1 < 0$

$$= \ln 3 - 1 > 0$$

اذن $h(1) \times h(2) < 0$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد عدد حقيقي وحيد α من $[1,2]$ بحيث : $h(\alpha) = 0$ أي $f(\alpha) = 1$

ج – انشاء المنحنى (C)



II) 1 - نضع $J=[1,\alpha]$ و $\varphi(x)=\ln(1+2x)$ $(\forall x\in I)$

أ – الدالة φ ق ش على المجال I لأنها مركب دالتين ق ش على المجال I

$$(\forall x\in I)\qquad \varphi'(x)=\frac{2}{1+2x}$$

$$x\geq 1\Rightarrow 1+2x\geq 3$$

$$\Rightarrow 0<\frac{1}{1+2x}\leq\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 0<\frac{2}{1+2x}\leq\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 0<\varphi'(x)\leq\frac{2}{3}$$

ب - $f(\alpha)=1\Leftrightarrow\dfrac{\ln(1+2\alpha)}{\alpha}=1$

$$\Leftrightarrow \ln(1+2\alpha)=\alpha$$

$$\Leftrightarrow \varphi(\alpha)=\alpha$$

لدينا $0<\varphi'(x)\leq\dfrac{2}{3}$ اذن φ تزايدية على I

$$1\leq x\leq\alpha\Rightarrow\varphi(1)\leq\varphi(x)\leq\varphi(\alpha)$$

$$\Rightarrow 1<\ln 3\leq\varphi(x)\leq\alpha$$

لدينا φ متصلة و $1<\varphi(x)\leq\alpha$ $(\forall x\in J)$

إذن $\varphi(J)\subset J$

2 - $\begin{cases}U_0=1\\ U_{n+1}=\ln(1+2U_n)(n\geq 0)\end{cases}$

أ - لدينا $U_{n+1}=\varphi(U_n)$

لنبين أن $U_n\in J$ أي $1\leq U_n\leq\alpha$ لكل $n\geq 0$

من أجل $n=0$ لدينا $U_0=1$ اذن $U_0\in J$

نفترض أن $U_n\in J$ لكل $n\geq 0$ و نبين أن $U_{n+1}\in J$

لدينا $U_n\in J$ وحسب س 1- ب - $\varphi(J)\subset J$

اذن $\varphi(U_n)\in J$ أي $U_{n+1}\in J$

و بالتالي $U_n\in J$ لكل $n\geq 0$

ب – لدينا $1 \le \alpha \le 2$

اذن $-2 \le -\alpha \le -1$ أي $-1 \le 1-\alpha \le 0 < 1$

اذن $|U_0 - \alpha| \le (\frac{2}{3})^0$

نفترض أن $|U_n - \alpha| \le (\frac{2}{3})^n$ لكل $n \ge 0$

و نبين أن $|U_{n+1} - \alpha| \le (\frac{2}{3})^{n+1}$

لدينا φ متصلة على المجال المغلوق الذي طرفاه α و U_n و ق ش على المجال المفتوح الذي طرفاه α و U_n

اذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية يوجد c محصور بين α و U_n بحيث :

$$|\varphi(U_n) - \varphi(\alpha)| = |\varphi'(c)||U_n - \alpha|$$

و بما أن $0 < \varphi'(x) \le \frac{2}{3}$ لكل $(x \ge 1)$ فان $|\varphi'(c)| \le \frac{2}{3}$

و لدينا $U_{n+1} = \varphi(U_n)$

و حسب س 1 – ب - $\varphi(\alpha) = \alpha$

اذن $|U_{n+1} - \alpha| \le \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$

حسب افتراض الترجع لدينا $|U_n - \alpha| \le (\frac{2}{3})^n$

اذن $|U_{n+1} - \alpha| \le (\frac{2}{3})^{n+1}$

و بالتالي $|U_n - \alpha| \le (\frac{2}{3})^n$ لكل $(n \ge 0)$

ج – المتتالية $(\frac{2}{3})^n$ متقاربة و نهايتها 0 (لان $-1 < \frac{2}{3} < 1$)

اذن حسب مصاديق التقارب المتتالية (U_n) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha$

III) لتكن F الدالة المعرفة على I بما يلي : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

1 - أ – f متصلة على I اذن تقبل دالة أصلية ψ على I

بحيث ψ ق ش على I و $\psi'(x) = f(x)$ $(\forall x \in I)$

لدينا $F(x) = [\psi(t)]_0^x$

$= \psi(x) - \psi(0)$

اذن F ق ش على I لانها مجموع دالتين ق ش على I

$F'(x) = \psi'(x)$ $(\forall x \in I)$

$F'(x) = f(x)$

ب – من خلال مبيان الدالة f نستنتج أن $f(x)>0$ $(\forall x \in I)$

اذن $F'(x)>0$ اذن F تزايدية قطعا على I

2 – أ – لدينا $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

اذن $F(x) = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt$

$$x \ge 1 \Rightarrow F(x) \ge \int_1^x f(t)dt$$

$$\Rightarrow F(x) \geq \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{t}dt$$

$$t \leq 1+2t \Rightarrow \frac{1}{t} \geq \frac{1}{1+2t} \Rightarrow \frac{\ln(1+2t)}{t} \geq \frac{\ln(1+2t)}{1+2t}$$

$$\Rightarrow \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{t}dt \geq \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t}dt$$

و بما أن $F(x) \geq \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{t}dt$

فان $F(x) \geq \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t}dt$

ب – لدينا $\int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t}dt = \int_1^x \ln(1+2t)\frac{1}{2}\ln'(1+2t)dt$

اذن $\int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t}dt = \left[\frac{1}{4}(\ln(1+2t))^2\right]_1^x$

أي $= \frac{1}{4}(\ln(1+2x))^2 - \frac{1}{4}(\ln 3)^2$

اذن $F(x) \geq \frac{1}{4}(\ln(1+2x))^2 - \frac{1}{4}(\ln 3)^2$

و بما أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}(\ln(1+2x))^2 - \frac{1}{4}(\ln 3)^2 = +\infty$

فان $\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty}$

3 – نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ على اليمين في $-\frac{1}{2}$

اذن F تقبل تمديدا بالاتصال على اليمين في $-\frac{1}{2}$

أ – لتكن $\tilde{F}$ الدالة المعرفة على $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ بما يلي :

$$\begin{cases} \tilde{F}(x) = F(x); x \in I \\ \tilde{F}(-\frac{1}{2}) = \ell \end{cases}$$

$\tilde{F}$ هي التمديد بالاتصال للدالة F على اليمين في $-\frac{1}{2}$

لدينا : $\tilde{F}$ متصلة على $\left[-\frac{1}{2},x\right]$

و ق ش على $\left]-\frac{1}{2},x\right[$

اذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية T.A.F

$$\exists c \in \left]-\frac{1}{2},x\right[: \frac{\tilde{F}(x) - \tilde{F}(-\frac{1}{2})}{x+\frac{1}{2}} = \tilde{F}'(c)$$

اذن $F(x)-\ell = F'(c)(x+\frac{1}{2})$

$F(x)-\ell = f(c)(x+\frac{1}{2})$

لدينا : $-\frac{1}{2} < c < x$

و بما أن f تناقصية على I فان $f(c) \geq f(x)$

اذن $\boxed{F(x)-\ell \geq f(x)(x+\frac{1}{2})}$

ب - $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{1}{2} \\ x>-\frac{1}{2}}} \frac{\tilde{F}(x)-\tilde{F}(-\frac{1}{2})}{x+\frac{1}{2}} = \lim\limits_{\substack{x\to -\frac{1}{2} \\ x>-\frac{1}{2}}} \frac{F(x)-\ell}{x+\frac{1}{2}}$

$\geq \lim\limits_{\substack{x\to -\frac{1}{2} \\ x>-\frac{1}{2}}} f(x)$

و بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{1}{2} \\ x>-\frac{1}{2}}} f(x) = +\infty$

فان $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{1}{2} \\ x>-\frac{1}{2}}} \frac{\tilde{F}(x)-\tilde{F}(-\frac{1}{2})}{x+\frac{1}{2}} \geq +\infty$

اذن : الدالة $\tilde{F}$ غير ق ش على اليمين في $-\frac{1}{2}$.

بعثه : ياسر غريز

المركز الوطني للامتحانات	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا (الدورة العادية 2007) الموضوع	الصفحة 1/4 C: NS24
المـــادة: الرياضيات		مدة الإنجاز: 4
الشعـــب(ة): العلوم الرياضية (أ) و (ب)		المعامل: 10

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

التمرين الأول (3 نقط)

I/ ليكن $E=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. لكل زوج (a,b) من E^2 ، نضع : $a\perp b=a+b-ab\sqrt{2}$

1- أ) تحقق أن لكل زوج (a,b) من E^2: $a\perp b=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)$ — ن0.25

ب) استنتج أن $\perp$ قانون تركيب داخلي في E . — ن0.25

2- بين أن $(E,\perp)$ زمرة تبادلية . — ن0.5

II/ $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 . نذكر أن $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ وأن $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot\right)$ فضاء متجهي حقيقي . لتكن $\mathcal{F}$ مجموعة المصفوفات من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل: $M(a)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-a&a\\a&\sqrt{2}-a\end{pmatrix}$ حيث : $a\in E$

نضع : $A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

1- أ) تحقق أن : $A^2=-2A$ وأن : $M(a)=I+\frac{a}{\sqrt{2}}A$ — ن0.5

ب) بين أن $\mathcal{F}$ جزء مستقر من $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times\right)$. — ن0.5

2- نعتبر التطبيق :

$$\varphi:(E,\perp)\to(\mathcal{F},\times)$$
$$a\to\varphi(a)=M(a)$$

أ) بين أن φ تشاكل تقابلي . — ن0.5

ب) استنتج بنية $(\mathcal{F},\times)$. — ن0.5

التمرين الثاني (3.5 نقطة)

ليكن a عددا عقديا مخالفا للعددين العقديين i و $-i$.

I/ 1-أ) تحقق أن العدد العقدي $u=a+i$ حل للمعادلة: $(E)\ z^2-(1+a)(1+i)z+(1+a^2)i=0$ — ن0.25

ب- حدد v الحل الثاني للمعادلة(E). — ن0.25

2- نفترض أن : $|a|=1$

أ) بين أن : $\frac{u}{v}\in\mathbb{R}$ — 0.25ن

ب) تحقق أن: $u^2=a\left[(a-\bar{a})+2i\right]$ — 0.25ن

ج) استنتج أن : $\arg(u)\equiv\frac{1}{2}\arg(a)+\frac{\pi}{4}[\pi]$ — 0.5ن

3- بين أن : $|u|+|v|\geq 2$ — 0.5ن

II/ المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

ليكن m عددا حقيقيا أكبر قطعا من 2 و (E_m) مجموعة النقط $M(a)$ من المستوى العقدي بحيث:
$|u|+|v|=m$

1- بين أن (E_m) إهليلج مركزه O . — 0.5ن

2- نضع: $a=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان.

أ) بين أن : $x^2+\left(1-\frac{4}{m^2}\right)y^2=\frac{m^2}{4}-1$ معادلة ديكارتية للإهليلج (E_m) — 0.25ن

ب) أنشيء (E_4) . — 0.25ن

3- نعتبر النقطتين $A(\sqrt{3})$ و $B(2i)$ رأسي الإهليلج (E_4) . — 0.5ن

بين أن المستقيم (AB) مماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$.

التمرين الثالث (3 نقط)

1- نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E):195x-232y=1$

أ) حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 195 و 232 — 0.5ن

ب) بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{(163+232k;137+195k)/k\in\mathbb{Z}\}$ — 0.5ن

ج) أوجد العدد الصحيح الطبيعي d الوحيد الذي يحقق : $0\leq d\leq 232$ و $195d\equiv 1\,[232]$ — 0.25ن

2- بين أن 233 عدد أولي — 0.25ن

3- لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة بين 0 و 232

نعتبر التطبيق f من A نحو A المعرف بما يلي : مهما يكن a من A فإن $f(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{195} على 233 .

نقبل أن : $(\forall a\in A\setminus\{0\})\quad a^{232}\equiv 1\,[233]$

أ) بين أنه لكل عنصرين a و b من المجموعة A , إذا كان $f(a)=f(b)$ فإن $a=b$ — 0.5ن

ب) ليكن a و b عنصرين من المجموعة A بحيث : $f(a)=b$, حدد a بدلالة b . — 0.5ن

ج) استنتج أن التطبيق f تقابل ثم حدد تقابله العكسي f^{-1} . — 0.5ن

التمرين الرابع (10.5 نقطة)

I/ نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=1+(x-1)e^{x}$

1- بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $g(x)\geq 0$ 0.5ن

2- بين أن $x=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$ 0.25ن

II/ لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{e^{x}-1} & ; x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i};\vec{j})$

1- احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)$. 0.5ن

2- بين أن الدالة f متصلة في 0 . 0.25ن

3- أ) احسب $f'(x)$ من اجل كل عنصر x من $\mathbb{R}^*$. 0.5ن

ب) استنتج تغيرات الدالة f . 0.25ن

4- نعتبر التكامل $J(x)=\int_0^x te^{-t}dt$ حيث x عدد حقيقي.

أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $J(x)=e^{-x}(e^{x}-1-x)$ 0.5ن

ب) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $\dfrac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}}\leq J(x)\leq \dfrac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$ 1ن

ج) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\dfrac{1}{2}e^{\frac{x-|x|}{2}}\leq \dfrac{e^{x}-1-x}{x^2}\leq \dfrac{1}{2}e^{\frac{x+|x|}{2}}$ 0.5ن

د) استنتج أن الدالة f قابلة للإشتقاق في 0 و أن $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$ 0.75ن

5- أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f''(x)=\dfrac{e^{x}}{(e^{x}-1)^3}\left(e^{x}(x-2)+2+x\right)$. 0.5ن

ب) ادرس إشارة $e^{x}(x-2)+2+x$ لكل x من $\mathbb{R}$. 0.5ن

ج) استنتج أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f''(x)>0$ 0.25ن

د) أنشئ (C) . 0.5ن

III/ نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=f(u_n)$

1- بين أن $x=\ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة : $f(x)=x$. 0.25ن

2- أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^+$: $|f'(x)|\leq\dfrac{1}{2}$. 0.5ن

0.5ن ب) بين أن لكل n من N : $\left|u_{n+1}-\ln 2\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n-\ln 2\right|$

0.5ن ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وحدد نهايتها .

IV/ لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} F(x)=\int_x^{2x}\frac{t}{e^t-1}\,dt\ ;\ x\neq 0 \\ F(0)=0 \end{cases}$

0.5ن 1- أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\frac{2x^2}{e^{2x}-1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x-1}$

0.25ن ب) بين أن الدالة F متصلة في 0 .

0.5ن ج) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق في 0 وأن : $F'(0)=1$

0.5ن 2 -أ) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ وأن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $F'(x)=\frac{3-e^x}{e^x+1}f(x)$.

0.25ن ب) ادرس تغيرات الدالة F .

التمرين الأول :

I. ليكن $E=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. لدينا : $a\perp b=a+b-ab\sqrt{2}$: $\forall(a,b)\in E^2$.

1. أ- ليكن $(a,b)\in E^2$. لدينا :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2ab+1-a\sqrt{2}-b\sqrt{2}\right)=a+b-ab\sqrt{2}=a\perp b$$

ب- ليكن $(a,b)\in E^2$. لدينا : $a\in E\Leftrightarrow a\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow a\sqrt{2}-1\neq 0$ و $b\in E\Leftrightarrow b\sqrt{2}-1\neq 0$. إذن :

$\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)\neq 0$ ومنه فإن: $a\perp b-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)\neq 0$ أي: $a\perp b\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$

ومنه فإن : $a\perp b\in E$. وبالتالي فإن : $a\perp b\in E$: $\forall(a,b)\in E^2$.

إذن $\perp$ قانون تركيب داخلي في E .

2. لدينا : $\perp$ قانون تركيب داخلي في E .

وبما أن الجمع والضرب قانونين تبادليين وتجميعيين في $\mathbb{R}$ ، فإن $\perp$ قانون تبادلي وتجميعي في E .

لدينا : $0\perp a=a$ و $a\perp 0=a$: $\forall a\in E$. إذن 0 هو العنصر المحايد بالنسبة ل $\perp$ في E .

ليكن $(a,b)\in E^2$. لدينا :

$$\begin{aligned}
a\perp b=0 &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)=1\\
&\Leftrightarrow b\sqrt{2}-1=\frac{1}{a\sqrt{2}-1}\\
&\Leftrightarrow b\sqrt{2}=\frac{1}{a\sqrt{2}-1}+1\\
&\Leftrightarrow b\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}-1}\\
a\perp b=0 &\Leftrightarrow \boxed{b=\frac{a}{a\sqrt{2}-1}}
\end{aligned}$$

وبما أن : $b=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\frac{a}{a\sqrt{2}-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow a\sqrt{2}=a\sqrt{2}-1\Leftrightarrow 0=-1$ وهذا غير ممكن، فإن : $b\in E$

وبالتالي فإن لكل $a\in E$ مماثل وحيد $b=\frac{a}{a\sqrt{2}-1}$ في E بالنسبة للقانون $\perp$.

وبالتالي فإن : $(E,\perp)$ زمرة تبادلية .

II. نعلم أن : $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

وأن : $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,.\right)$ فضاء متجهي حقيقي .

$\mathscr{F}$ مجموعة المصفوفات من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على شكل $M(a)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-a&a\\a&\sqrt{2}-a\end{pmatrix}$ حيث $a\in E$.

نضع : $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

1. أ- لدينا : $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=-2A$. $\boxed{A^2=-2A}$

ولدينا : $M(a)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-a & a\\ a & \sqrt{2}-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{a}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=I+\frac{a}{\sqrt{2}}A$. $\boxed{M(a)=I+\frac{a}{\sqrt{2}}A}$

ب- ليكن $(a,b)\in E^2$. لدينا : $M(a)\times M(b)=\left(I+\frac{a}{\sqrt{2}}A\right)\times\left(I+\frac{b}{\sqrt{2}}A\right)=I+\frac{ab}{2}A^2+\frac{a}{\sqrt{2}}A+\frac{b}{\sqrt{2}}A$

$$M(a)\times M(b)=\left(I+\frac{a}{\sqrt{2}}A\right)\times\left(I+\frac{b}{\sqrt{2}}A\right)=I-abA+\frac{a}{\sqrt{2}}A+\frac{b}{\sqrt{2}}A=I+\frac{a+b-ab\sqrt{2}}{\sqrt{2}}A$$

$$M(a)\times M(b)=I+\frac{a\perp b}{\sqrt{2}}A=M(a\perp b)$$

إذن : $\boxed{M(a)\times M(b)=M(a\perp b)}$ و $a\perp b\in E$ (حسب السؤال I.1.ب)

ومنه فإن : $M(a)\times M(b)=M(a\perp b)\in\mathscr{F}$. إذن $\mathscr{F}$ جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

2. نعتبر التطبيق :

$$\begin{array}{rccc}\varphi : & (E,\perp) & \to & (\mathscr{F},\times)\\ & a & \mapsto & \varphi(a)=M(a)\end{array}$$

أ- ليكن $(a,b)\in E^2$. لدينا : $\varphi(a\perp b)=M(a\perp b)=M(a)\times M(b)=\varphi(a)\perp\varphi(b)$.

إذن : φ تشاكل من $(E,\perp)$ نحو $(\mathscr{F},\times)$.

ليكن $B\in\mathscr{F}$ ، إذن : $\exists a\in E\ \ /\ \ B=M(a)$. إذن : $\exists a\in E\ \ /\ \ B=\varphi(a)$.

وعليه فإن φ شمولي من E نحو $\mathscr{F}$.

ولدينا : $\varphi(a)=\varphi(b)\Rightarrow M(a)=M(b)\Rightarrow I+\frac{a}{\sqrt{2}}A=I+\frac{b}{\sqrt{2}}A\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{2}}A=\frac{b}{\sqrt{2}}A\Rightarrow a=b$

إذن : φ تبايني من E نحو $\mathscr{F}$.

وبالتالي فإن φ تشاكل تقابلي من $(E,\perp)$ نحو $(\mathscr{F},\times)$.

ب- بما أن φ تشاكل تقابلي من $(E,\perp)$ نحو $(\mathscr{F},\times)$ و $(E,\perp)$ زمرة تبادلية ، فإن $(\mathscr{F},\times)$ زمرة تبادلية.

التمرين 2 :

ليكن $a\in\mathbb{C}-\{-i,i\}$.

I. 1. أ- نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E)\ :\ z^2-(1+a)(1+i)z+(1+a^2)i=0$. ليكن : $u=a+i$. لدينا :

$$\begin{aligned}u^2-(1+a)(1+i)u+(1+a^2)i &= (a+i)^2-(1+a)(1+i)(a+i)+(1+a^2)i\\ &= a^2+2ai-1-(1+a)(a+i+ai-1)+i+a^2i\\ &= a^2+2ai-1-a-i-ai+1-a^2-ai-a^2i+1+i+a^2i\\ u^2-(1+a)(1+i)u+(1+a^2)i &= 0\end{aligned}$$

إذن : $u=a+i$ حل للمعادلة (E) .

ب- ليكن v الحل الآخر للمعادلة (E) . لدينا :

$$u+v=-\frac{b}{a}=(1+a)(1+i) \Rightarrow v=(1+a)(1+i)-u$$
$$\Rightarrow v=(1+a)(1+i)-(a+i)$$
$$\Rightarrow v=1+i+a+ai-a-i$$
$$\Rightarrow \boxed{v=1+ai}$$

2. نفترض أن : $|a|=1$. إذن : $a\bar{a}=|a|^2=1$ ، ومنه فإن : $\boxed{\bar{a}=\frac{1}{a}}$.

أ- بما أن : $\frac{u}{v}=\frac{a+i}{1+ai}=\frac{i(1-ai)}{i(a-i)}=\frac{1-ai}{a-i}=\frac{\frac{1}{a}-i}{1-\frac{i}{a}}=\frac{\bar{a}-i}{1-\bar{a}i}=\frac{\overline{a+i}}{\overline{1+ai}}=\frac{\bar{u}}{\bar{v}}=\overline{\left(\frac{u}{v}\right)}$ ، فإن : $\boxed{\frac{u}{v}\in\mathbb{R}}$.

ب- لدينا : $u^2=(a+i)^2=a^2-1+2ai=a^2-a\bar{a}+2ai=a\left[(a-\bar{a})+2i\right]$. $\boxed{u^2=a\left[(a-\bar{a})+2i\right]}$

جـ- لدينا : $\arg(u^2)\equiv 2\arg(u)[2\pi]$ و لدينا : $\arg(u^2)\equiv\arg\left(a\left[(a-\bar{a})+2i\right]\right)[2\pi]$

$$\equiv\arg(a)+\arg\left((a-\bar{a})+2i\right)[2\pi]$$

ولدينا : $(a-\bar{a})+2i=2i\,\Im m(a)+2i=2\left(\Im m(a)+1\right)i$.

ولدينا : $|\Im m(a)|\le|a|\Rightarrow|\Im m(a)|\le1\Rightarrow-1\le\Im m(a)\le1\Rightarrow0\le\Im m(a)+1\le2$.

ومنه فإن : $(a-\bar{a})+2i=\left[2\left(\Im m(a)+1\right),\frac{\pi}{2}\right]$. إذن : $\arg\left((a-\bar{a})+2i\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

وعليه فإن : $\arg(u^2)\equiv\arg(a)+\frac{\pi}{2}[2\pi]$. أي : $2\arg(u)\equiv\arg(a)+\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

وبالتالي فإن : $\boxed{\arg(u)\equiv\frac{1}{2}\arg(a)+\frac{\pi}{4}[\pi]}$.

3. <u>**طريقة 1 :**</u>

لدينا: $|u+iv|\le|u|+|iv|=|u|+|v|$، و $u+iv=a+i+i(1+ai)=2i$.ومنه فإن $|u+iv|=|2i|=2$

وبالتالي فإن : $\boxed{|u|+|v|\ge2}$.

<u>**طريقة 2 :**</u>

لدينا: $|a|=1$. إذن : $a\bar{a}=1$ ومنه فإن :

$$|u|+|v|=|a+i|+|1+ai|=|a+i|+|a\bar{a}+ai|=|a+i|+|a||\bar{a}+i|=|a+i|+|\bar{a}+i|\ge|a+i+\bar{a}+i|$$

ولدينا : $a+i+\bar{a}+i=a+\bar{a}+2i=2\Re e(a)+2i=2\left(\Re e(a)+i\right)$.

إذن : $|a+i+\bar{a}+i|=2|\Re e(a)+i|=2\sqrt{\left(\Re e(a)\right)^2+1}$.

وبما أن :

$$\left|\Re e(a)\right| \le |a| \quad \Rightarrow \quad \left|\Re e(a)\right| \le 1$$
$$\Rightarrow \quad -1 \le \Re e(a) \le 1$$
$$\Rightarrow \quad 0 \le \left(\Re e(a)\right)^2 \le 1$$
$$\Rightarrow \quad 1 \le 1 + \left(\Re e(a)\right)^2 \le 2$$
$$\Rightarrow \quad 1 \le \sqrt{1 + \left(\Re e(a)\right)^2}$$
$$\left|\Re e(a)\right| \le |a| \quad \Rightarrow \quad 2 \le 2\sqrt{1 + \left(\Re e(a)\right)^2}$$
$$\Rightarrow \quad 2 \le \left|a + i + \bar{a} + i\right|$$

إذن : $|u| + |v| \ge \left|a + i + \bar{a} + i\right|$ و $\left|a + i + \bar{a} + i\right| \ge 2$ ، ومنه نستنتج أن :

$$\boxed{|u| + |v| \ge 2}$$

II. المستوى العقدي $\mathscr{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$. ليكن $m \in \left]2, +\infty\right[$.

نعتبر (E_m) مجموعة النقط $M(a)$ من المستوى العقدي $\mathscr{P}$ بحيث : $|u| + |v| = m$.

1. نعلم أن : $|u| + |v| = |a + i| + |a - i|$.

لتكن $F(i)$ و $F'(-i)$ نقطتين من المستوى العقدي $\mathscr{P}$ اللتان لحقاهما على التوالي i و $-i$.

لدينا : $|u| + |v| = m \Leftrightarrow |a + i| + |a - i| = m \Leftrightarrow MF + MF' = m$.

وبما أن المسافة البؤرية $FF' = \left|z_{F'} - z_F\right| = |-i - i| = |-2i| = 2$ و $m = |u| + |v| \ge 2$ ، فإن :

$m = 2b \ge 2c$. إذن : (E_m) إهليلج مركزه منتصف القطعة $[FF']$ أي O أصل المعلم .

2. نضع : $a = x + iy$ حيث $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

أ- لدينا :

$$M(a) \in (E_m) \quad \Leftrightarrow \quad |u| + |v| = m$$
$$\Leftrightarrow \quad MF + MF' = m$$

نعلم أن : $F(0,1)$ و $F'(0,-1)$ و $M(x, y)$ ،

إذن : $\overrightarrow{MF}(-x, 1 - y)$ و $\overrightarrow{MF'}(-x, -1 - y)$.

ومنه فإن : $MF^2 = x^2 + (1 - y)^2$ و $MF'^2 = x^2 + (1 + y)^2$.

إذن : $MF^2 - MF'^2 = -4y$ ، ومنه $(MF - MF')(MF + MF') = -4y$ ،

وبما أن : $MF + MF' = m$ ،

فإن : $m(MF - MF') = -4y$.

أي : $MF - MF' = -\dfrac{4}{m}y$.

$$\begin{array}{lcl} MF+MF' & = & m \\ (+) & & \\ MF-MF' & = & -\frac{4}{m}y \\ \hline 2MF & = & m-\frac{4}{m}y \end{array}$$

وعليه فإننا نجد :

إذن : $MF=\frac{m}{2}-\frac{2}{m}y$. ومنه فإن : $MF^2=\left(\frac{m}{2}-\frac{2}{m}y\right)^2=\frac{m^2}{4}-2y+\frac{4}{m^2}y^2$

و بما أن $MF^2=x^2+(1-y)^2$ ، فإن : $\frac{m^2}{4}-2y+\frac{4}{m^2}y^2=x^2+(1-y)^2$.

أي : $\frac{m^2}{4}-2y+\frac{4}{m^2}y^2=x^2+1-2y+y^2$ يكافئ $\frac{m^2}{4}+\frac{4}{m^2}y^2=x^2+1+y^2$.

وبالتالي فإن معادلة ديكارتية للإهليلج (E_m) هي : $\boxed{x^2+\left(1-\frac{4}{m^2}\right)y^2=\frac{m^2}{4}-1}$.

<u>بطريقة أخرى :</u>

نعلم أن معادلة ديكارتية للإهليلج (E_m) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ تكتب على شكل :

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ أي $x^2+\frac{a^2}{b^2}y^2=a^2$ و $2b=m\Rightarrow b=\frac{m}{2}$ و $c=\frac{FF'}{2}=\frac{2}{2}=1$.

إذن : $c^2=b^2-a^2\Rightarrow a^2=b^2-c^2=\left(\frac{m}{2}\right)^2-1^2=\frac{m^2}{4}-1$.

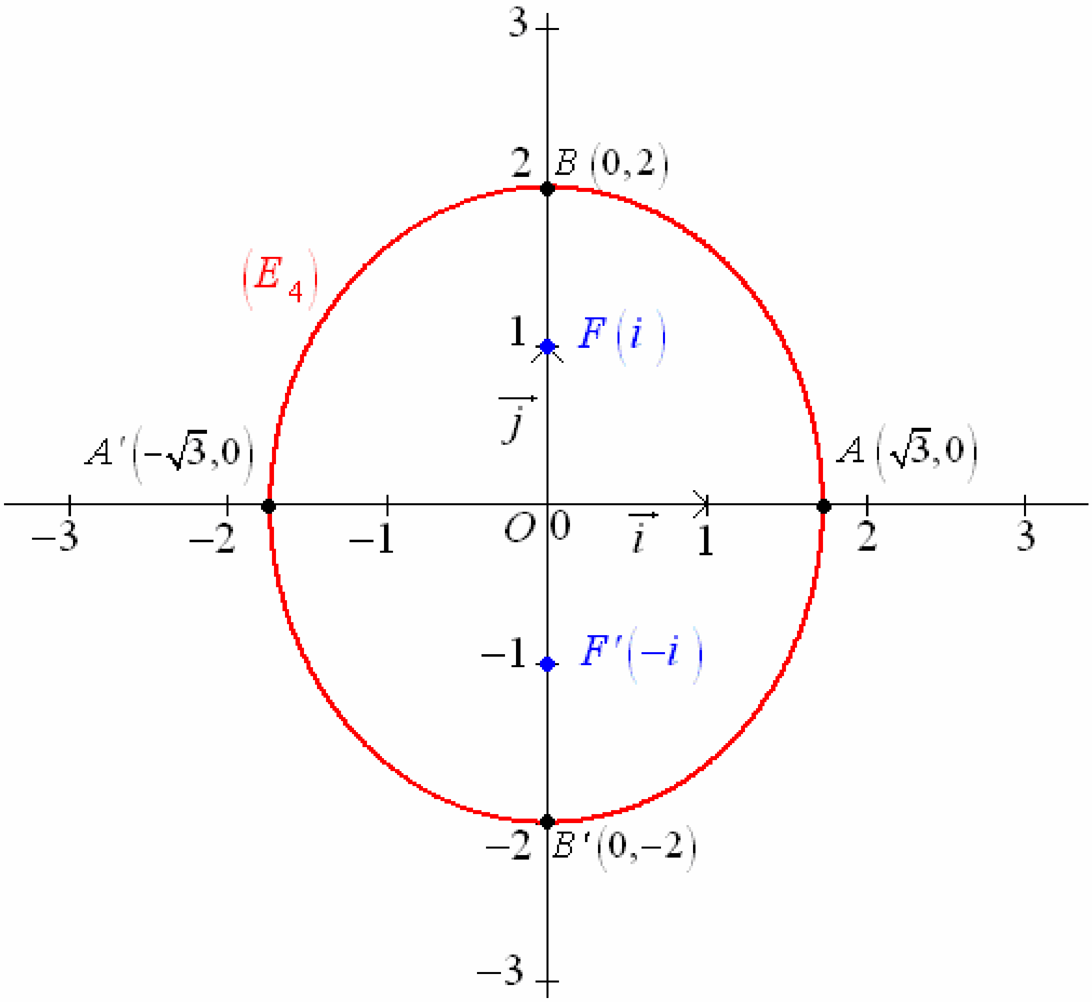
وبالتالي فإن ديكارتية للإهليلج (E_m) هي : $\boxed{x^2+\left(1-\frac{4}{m^2}\right)y^2=\frac{m^2}{4}-1}$.

ب- لدينا : $(E_4)\ :\ x^2+\frac{3}{4}y^2=3$. إذن : $(E_4)\ :\ \frac{x^2}{\sqrt{3}^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$.

إذن : $a=\sqrt{3}$ و $b=2$. ومنه فإن : $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{2^2-\sqrt{3}^2}=1$.

ومنه فإن (E_4) إهليلج :

- مركزه O .
- رؤوسه $A(\sqrt{3},0)$ و $A'(-\sqrt{3},0)$ و $B(0,2)$ و $B'(0,-2)$.
- بؤرتيه $F(0,1)$ و $F'(0,-1)$.
- تباعده المركزي $e=\frac{c}{b}=\frac{1}{2}$.



3. **<u>طريقة 1 :</u>**

معادلة الإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$: $\boxed{x^2+\frac{9}{16}y^2=\frac{9}{7}} \Leftrightarrow x^2+\left(1-\frac{4}{\frac{8^2}{7}}\right)y^2=\frac{\frac{8^2}{7}}{4}-1$.

معادلة المستقيم (AB) هي : $\boxed{y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+2} \Leftrightarrow \frac{x-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}=\frac{y-0}{2} \Leftrightarrow \frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$.

لنحدد تقاطع المستقيم (AB) والإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ بحل النظمة : $(*) : \begin{cases} x^2+\frac{9}{16}y^2=\frac{9}{7} \\ y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+2 \end{cases}$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{4}x^2-\frac{3}{2}\sqrt{3}x+\frac{9}{4}=\frac{9}{7} \\ y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 49x^2-42\sqrt{3}x+27=0 \\ y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7x-3\sqrt{3})^2=0 \\ y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+2 \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3\sqrt{3}}{7} \\ y=\frac{8}{7} \end{cases}$$

ومنه فإن المستقيم (AB) والإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ يتقاطعان وفق النقطة $\Omega\left(\frac{3\sqrt{3}}{7},\frac{8}{7}\right)$.

نعلم أن معادلة المماس للإهليلج $x^2+\frac{9}{16}y^2=\frac{9}{7}$: $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في النقطة Ω هي :

$$xx_0+\frac{9}{16}yy_0=\frac{9}{7} \Leftrightarrow x\frac{3\sqrt{3}}{7}+\frac{9}{16}y\frac{8}{7}=\frac{9}{7}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{7}\sqrt{3}x+\frac{9}{14}y=\frac{9}{7}$$
$$\Leftrightarrow 2x+\sqrt{3}y=2\sqrt{3}$$

وبالتالي فإن المستقيم (AB) مماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في النقطة $\Omega\left(\frac{3\sqrt{3}}{7},\frac{8}{7}\right)$.

طريقة 2 :

معادلة الإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$:

$$x^2+\left(1-\frac{4}{\frac{8^2}{7}}\right)y^2=\frac{\frac{8^2}{7}}{4}-1\Leftrightarrow x^2+\frac{9}{16}y^2=\frac{9}{7}\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{16}{7}-\frac{16}{9}x^2}$$

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي : $g(x)=\sqrt{\frac{16}{7}-\frac{16}{9}x^2}$: $\forall x\in\left[-\frac{3\sqrt{7}}{7},\frac{3\sqrt{7}}{7}\right]$.

معادلة (AB) هي : $\frac{x-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}=\frac{y-0}{2}\Leftrightarrow \boxed{y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+2}$.

(AB) مماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ ، إذا وجد عدد حقيقي $x\in\left]-\frac{3\sqrt{7}}{7},\frac{3\sqrt{7}}{7}\right[$ بحيث : $g'(x)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

أو $-g'(x)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

لدينا : $g'(x)=-\frac{16}{9}\frac{x}{\sqrt{\frac{16}{7}-\frac{19}{9}x^2}}$ و $g'(x)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow x=\frac{3\sqrt{3}}{7}$ ومنه $y=g\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}\right)=\frac{8}{7}$.

لدينا : $\Omega\left(\frac{3\sqrt{3}}{7},\frac{8}{7}\right)\in\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$

ولدينا معادلة المماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في النقطة Ω تحدد بما يلي :

$$x\frac{3\sqrt{3}}{7}+\frac{9}{16}y\frac{8}{7}=\frac{9}{7}\Leftrightarrow 3\sqrt{3}x+\frac{9}{2}y=9\Leftrightarrow y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+2$$

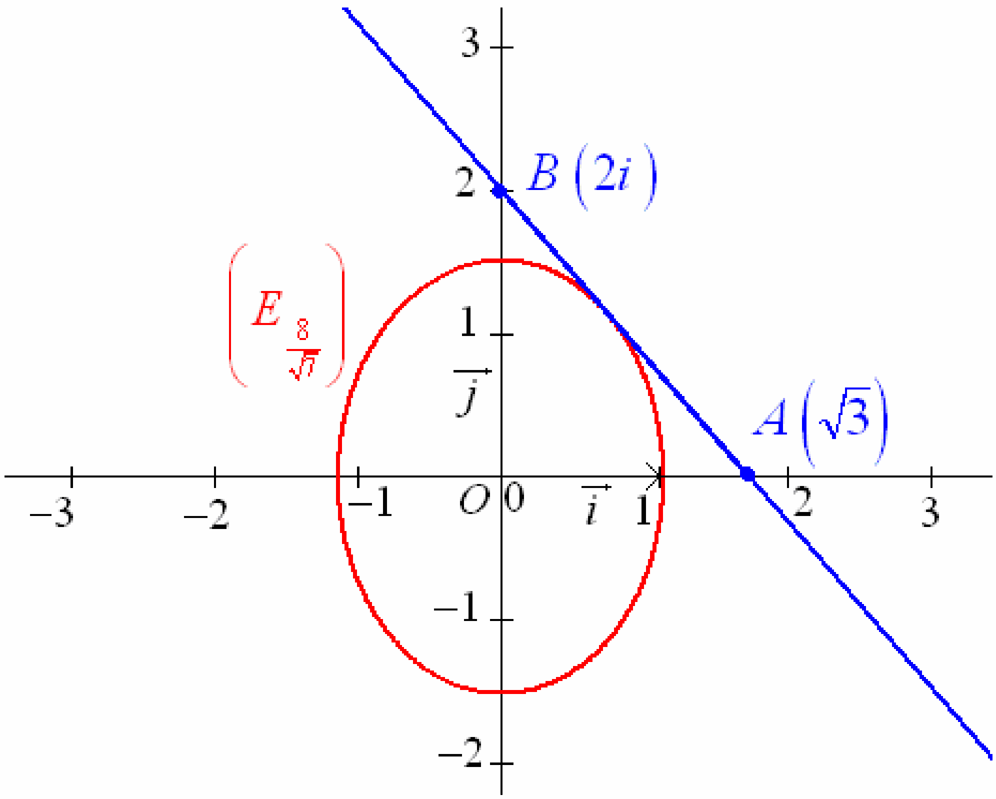
وهي المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) .

وبالتالي فإن (AB) مماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$.

ولدينا : $x=-\frac{3\sqrt{3}}{7} \Leftrightarrow -g'(x)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ومنه $y=-g\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}\right)=-\frac{8}{7}$.

إذن : $\Omega'\left(-\frac{3\sqrt{3}}{7},-\frac{8}{7}\right)\in\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ و لدينا معادلة المماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في النقطة Ω هي :

$-x\frac{3\sqrt{3}}{7}-\frac{9}{16}y\frac{8}{7}=\frac{9}{7} \Leftrightarrow -3\sqrt{3}x-\frac{9}{2}y=9 \Leftrightarrow y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x-2$. هذه المعادلة ليست المعادلة المختصرة للمستقيم (AB)، إنما هي المعادلة المختصرة للمستقيم الموازي ل (AB) والمار من Ω' .



التمرين الثالث :

1. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(E)\ :\ 195x-232y=1$.

أ- **طريقة 1 :** لدينا :

232	2
116	2
58	2
29	29
1	

195	3
65	5
13	13
1	

إذن : $195=3\times5\times13$ و $232=2^3\times29$.

ومنه فإن : $232\wedge195=1$.

طريقة 2 : حسب تقنية القسمة الأقليدية المتتابعة لأقليدس ، لدينا :

$$\begin{array}{l|c}
\times 58 & 232 = 195\times 1 + \cancel{37} \\
\times(-11) & 195 = \cancel{37}\times 5 + \cancel{10} \\
\times 3 & \cancel{37} = \cancel{10}\times 3 + \cancel{7} \\
\times(-2) & \cancel{10} = \cancel{7}\times 1 + \cancel{3} \\
\times 1 & \cancel{7} = \cancel{3}\times 2 + 1 \\
\hline
 & 3 = 1\times 3 + 0
\end{array}$$

$$58\times 232 - 11\times 195 = 58\times 195 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{58\times 232 - 69\times 195 = 1}$$

ومنه نستنتج أن $232\wedge 195 = 1$. بالإظافة إلى معاملي Bezout.

ب- لدينا :

$$\begin{array}{rcl}
195x - 232y & = & 1 \\
195\times(-69) + 232\times 58 & = & 1 \\
\hline
\end{array} \quad (-)$$

$$195(x+69) - 232(y+58) = 0$$

$$\Leftrightarrow 195(x+69) = 232(y+58) \quad (*)$$

إذن : $232 \ / \ x+69 \overset{Gauss}{\Longrightarrow} 232 \ / \ 195(x+69)$. ومنه فإن : $\exists h \in \mathbb{R} \ / \ x+69 = 232h$

أي : $\exists h \in \mathbb{R} \ / \ x = -69 + 232h$. نعوض هذا التعبير في العلاقة $(*)$ ، فنجد :

$195\times 232h = 232(y+58) \Leftrightarrow 195h = y+58 \Leftrightarrow y = -58+195h$.

ومنه فإن : $(x,y) = (-69+232h, -58+195h)$ حيث $h\in\mathbb{Z}$. أي :

$(x,y) = (-69+232+232(h-1), -58+195+195(h-1))$.

يكافئ : $(x,y) = (163+232(h-1), 137+195(h-1))$ وبوضع $k = h-1$ ، نجد : $k\in\mathbb{Z}$ و

$(x,y) = (163+232k, 137+195k)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

وبما أن الأزواج $(163+232k, 137+195k)$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$ ، تحقق المعادلة (E) ، فإن مجموعة

حلول المعادلة (E) هي : $S = \{(163+232k, 137+195k) \ / \ k\in\mathbb{Z}\}$

جـ- ليكن d عددا صحيحا طبيعيا بحيث $0 \le d \le 232$ و $195d \equiv 1[232]$.

لدينا : $\exists m\in\mathbb{Z} \ / \ 195d - 232m = 1$. حسب السؤال 1.ب ، لدينا :

$\exists k\in\mathbb{Z} \ / \ (d,m) = (163+232k, 137+195k)$. إذا : $\exists k\in\mathbb{Z} \ / \ d = 163+232k$.

$$0 \le d \le 232 \iff 0 \le 163+232k \le 232$$
$$\iff -163 \le 232k \le 69$$
$$\iff -\frac{163}{232} \le k \le \frac{69}{232}$$

وبما أن : $k \in \mathbb{Z}$ و $\frac{69}{232} \approx 0,29$ و $-\frac{163}{232} \approx -0,70$ ، فإن : $k=0$. إذن : $\boxed{d=163}$.

2. لدينا : $N=233$. $\qquad N=pq+r \quad ; \quad 0 \le r < p$

p	q	r	p^2
2	116	1	4
3	77	2	9
5	46	3	25
7	33	2	49
11	21	2	121
13	17	12	169
17	13	12	289 Stop

إذن $N=233$ عدد أولي .

نتوقف في حالة $q<p$ (أو $p^2>N$).

3. لتكن $A=[0,232]\cap\mathbb{N}$. ليكن $f : A \to A$ تطبيقا يربط كل عنصر $a\in A$ بالعنصر $f(a)$ حيث $f(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{195} على 233 .

نقبل أن : $\boxed{\forall a\in A\setminus\{0\} \quad : \quad a^{232}\equiv 1[233]}$.

<u>مبرهنة فيرما</u> : إذا كان n عددا صحيحا طبيعيا أوليا ، فإن : $\boxed{\forall a\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \quad : \quad a^{n-1}\equiv 1[n]}$

أ- ليكن $(a,b)\in A^2$ بحيث $f(a)=b$. لدينا $f(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{195} على 233 .

إذن : $a^{195}\equiv f(a)[233]$ و $0\le f(a)<233$. ومنه فإن : $a^{195}\equiv b[233]$ و $0\le b<233$.

ومنه فإن : $a^{195\times163}\equiv b^{163}[233]$ ولدينا : $195\times163\equiv1[232]$. إذن : $195\times163=1+232k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$. إذن : $a^{1+232k}\equiv b^{163}[233]$. نعلم أن : $a^{232}\equiv1[233]$ ، إذن : $a^{232k}\equiv1[233]$.

وعليه فإن : $a^{1+232k}\equiv1[233]$. إذن : $a\equiv b^{163}[233]$ و $0\le a\le232<233$.

وبالتالي نستنتج أن a هو باقي القسمة الأقليدية ل b^{163} على 233 .

جـ- حسب 3.أ ، لدينا f تقابل من A نحو A ولدينا $f^{-1} : A \to A$ هو التطبيق الذي يربط كل عنصر $b\in A$ بالعنصر $f(b)$ حيث $f(b)$ هو باقي القسمة الأقليدية ل b^{163} على 233 .

<u>التمرين الرابع :</u>

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(x)=1+(x-1)e^x$$

1. ليكن $x\in\mathbb{R}$ ، لدينا : $g(x)=1+(x-1)e^x=1-e^x+xe^x$.

إذن : $g'(x)=\left(1+(x-1)e^x\right)'=e^x+(x-1)e^x=xe^x$. إشارة $g'(x)$ هي إشارة x .

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 1+xe^x-e^x=\boxed{1} \quad و \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 1+(x-1)e^x=\boxed{+\infty}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	1 $\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

0 قيمة دنيا مطلقة للدالة g على $\mathbb{R}$. إذن : $g(x)\geq 0$: $\forall x\in\mathbb{R}$.

2. لدينا $g(0)=0$. ولدينا :

g تناقصية قطعا على $]-\infty,0[$. إذن : $x<0 \Rightarrow g(x)>g(0) \Rightarrow g(x)>0$.

g تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$. إذن : $x>0 \Rightarrow g(x)>g(0) \Rightarrow g(x)>0$.

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^* \ : \ g(x)>0}$.

II. لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{e^x-1} \quad ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{e^x}}=\boxed{0}$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x-1}+x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xe^x}{e^x-1}=\dfrac{0}{0-1}=\boxed{0}$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{e^x-1}{x}}=1=f(0)$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

إذن f متصلة في 0 .

3. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}^*$ ، لدينا :

$$f'(x)=\left(\frac{x}{e^x-1}\right)'=\frac{x'(e^x-1)-x(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}=\frac{-1-(x-1)e^x}{(e^x-1)^2}=-\frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$$

ب- إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$ هي إشارة $-g(x)$. ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x-1}=\boxed{+\infty}$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$		0

4. ليكن $x \in \mathbb{R}$ ، لدينا : $J(x)=\int_0^x te^{-t}dt$.

أ- نضع : $\begin{cases} u'(t)=e^{-t} \\ v(t)=t \end{cases}$ ، إذن : $\begin{cases} u(t)=-e^{-t} \\ v'(t)=1 \end{cases}$

لدينا : u و v متصلتان وقابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$. حسب تقنية المكاملة بالأجزاء ، لدينا :

$$J(x)=\int_0^x te^{-t}dt=\int_0^x u'(t)v(t)dt=\left[u(t)v(t)\right]_0^x-\int_0^x u'(t)v(t)dt$$

$$J(x)=\left[-te^{-t}\right]_0^x-\int_0^x -e^{-t}dt=-xe^{-x}-0-\left[e^{-t}\right]_0^x=-xe^{-x}-e^{-x}+1$$

وبالتالي فإن : $\boxed{J(x)=e^{-x}\left(e^x-1-x\right)}$

ب- ليكن $x \in \mathbb{R}$ ، لدينا : $J(x)=\int_0^x te^{-t}dt$.

إذا كان $x \in \mathbb{R}^+$ ، فإن : $0\le t\le x \Rightarrow -x\le -t\le 0 \Rightarrow e^{-x}\le e^{-t}\le 1 \Rightarrow te^{-x}\le te^{-t}\le t$.

إذن : $\int_0^x te^{-x}dt\le\int_0^x te^{-t}dt\le\int_0^x tdt \Rightarrow e^{-x}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x\le J(x)\le\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \Rightarrow \frac{x^2}{2}e^{-x}\le J(x)\le\frac{x^2}{2}$

ومنه فإن : $\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}}\le J(x)\le\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$.

إذا كان $x \in \mathbb{R}^-$ ، فإن : $x\le t\le 0 \Rightarrow 0\le -t\le -x \Rightarrow 1\le e^{-t}\le e^{-x} \Rightarrow te^{-x}\le te^{-t}\le t$ ، لأن $t\le 0$.

إذن: $\int_x^0 te^{-x}dt\le\int_x^0 te^{-t}dt\le\int_x^0 tdt \Rightarrow e^{-x}\left[\frac{t^2}{2}\right]_x^0\le -J(x)\le\left[\frac{t^2}{2}\right]_x^0 \Rightarrow -\frac{x^2}{2}e^{-x}\le -J(x)\le -\frac{x^2}{2}$

وعليه فإن : $\frac{x^2}{2}\le J(x)\le\frac{x^2}{2}e^{-x}$ ، ومنه فإن : $\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}}\le J(x)\le\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$.

هذه العلاقة تظل صحيحة من أجل $x=0$.

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R} \;:\; \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}}\le J(x)\le\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}}$

ج- ليكن $x \in \mathbb{R}^*$ ، لدينا : $J(x)=e^{-x}\left(e^x-1-x\right)$ و $\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}}\le J(x)\le\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$.

إذن : $\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}}\le e^{-x}\left(e^x-1-x\right)\le\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$ ، ومنه : $\frac{1}{2}e^xe^{-\frac{x+|x|}{2}}\le\frac{e^x-1-x}{x^2}\le\frac{1}{2}e^xe^{-\frac{x-|x|}{2}}$

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^* \;:\; \frac{1}{2}e^{\frac{x-|x|}{2}}\le\frac{e^x-1-x}{x^2}\le\frac{1}{2}e^{\frac{x+|x|}{2}}}$.

د- لدينا : $\frac{1}{2}e^{\frac{x+|x|}{2}} \le \frac{e^x-1-x}{x^2} \le \frac{1}{2}e^{\frac{x-|x|}{2}}$: $\forall x \in \mathbb{R}^*$ و $\lim_{x\to0}\frac{1}{2}e^{\frac{x-|x|}{2}}=\frac{1}{2}$ و $\lim_{x\to0}\frac{1}{2}e^{\frac{x+|x|}{2}}=\frac{1}{2}$

حسب خاصيات الترتيب والنهايات ، لدينا : $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}}$

ومنه فإن : $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}-\frac{e^x-1-x}{x^2}\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}=\boxed{-\frac{1}{2}}$

إذن f قابلة للاشتقاق في 0 ولدينا : $\boxed{f'(0)=-\frac{1}{2}}$.

5. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}^*$ ، لدينا :

$$f''(x)=\left(\frac{-g(x)}{(e^x-1)^2}\right)'=\frac{-g'(x)(e^x-1)^2+g(x)\left((e^x-1)^2\right)'}{(e^x-1)^4}=\frac{-xe^x(e^x-1)^2+2e^xg(x)(e^x-1)}{(e^x-1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{-xe^x(e^x-1)^2+2e^xg(x)(e^x-1)}{(e^x-1)^4}=\frac{e^x}{(e^x-1)^3}\left(-x(e^x-1)+2g(x)\right)$$

$$f''(x)=\frac{e^x}{(e^x-1)^3}\left(-xe^x+x+2+2(x-1)e^x\right)$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{e^x}{(e^x-1)^3}\left(e^x(x-2)+2+x\right)}$$

ب- ليكن $x\in\mathbb{R}$ ، نضع : $h(x)=e^x(x-2)+2+x$ ، لدينا :

$$h'(x)=\left(e^x(x-2)+2+x\right)'=e^x+e^x(x-2)+1=e^x(x-1)+1=g(x)\ge0$$

إذن h تزايدية على $\mathbb{R}$. وبما أن $h(0)=0$ ، فإن :

$$x\ge0 \Rightarrow h(x)\ge h(0) \Rightarrow h(x)\ge0 \quad \text{و} \quad x\le0 \Rightarrow h(x)\le h(0) \Rightarrow h(x)\le0$$

جـ- لدينا : $f''(x)=\frac{e^x}{(e^x-1)^2}\times\frac{h(x)}{e^x-1}$: $\forall x\in\mathbb{R}^*$.

إشارة $f''(x)$ على $\mathbb{R}^*$ هي إشارة $\frac{h(x)}{e^x-1}$.

ليكن $x\in\mathbb{R}^*$. لدينا :

$x > 0 \Rightarrow e^x > 1$ و $h(x) > 0$ | $x < 0 \Rightarrow e^x < 1$ و $h(x) < 0$

$\Rightarrow e^x - 1 > 0$ و $h(x) > 0$ | $\Rightarrow e^x - 1 < 0$ و $h(x) < 0$

$\Rightarrow \dfrac{h(x)}{e^x - 1} > 0$ و $\Rightarrow \dfrac{h(x)}{e^x - 1} > 0$

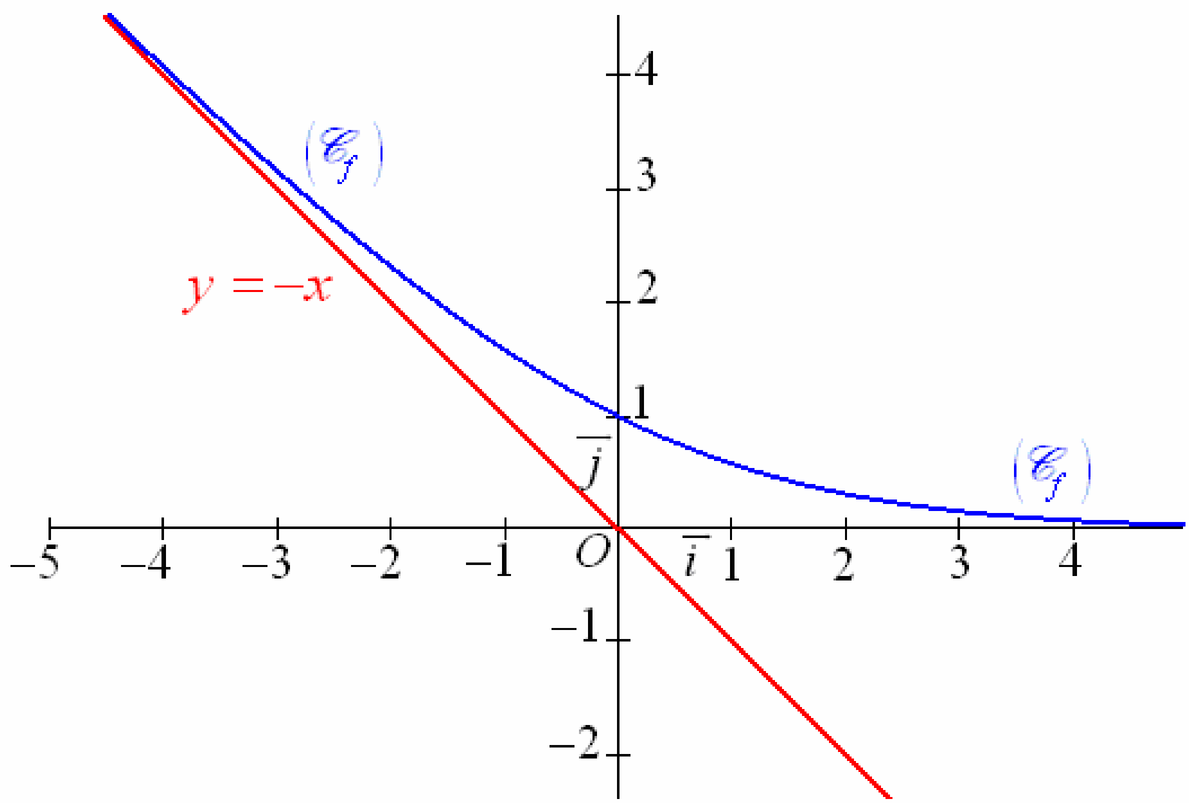
$\Rightarrow f''(x) > 0$ | $\Rightarrow f''(x) > 0$

في كلتا الحالتين ، لدينا : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^* \ : \ f''(x) > 0}$.

د- إنشاء المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في المستوى $\mathscr{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ إذن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$.

ولدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + x = 0$ إذن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مقاربا مائلا بجوار $-\infty$ معادلته $y = -x$.



III. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. ليكن $x\in\mathbb{R}^*$. لدينا :

$$\begin{aligned} f(x)=x &\Leftrightarrow \frac{x}{e^x-1}=x \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{e^x-1}-x=0 \\ &\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{e^x-1}-1\right)=0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ أو } \frac{1}{e^x-1}=1 \\ &\Leftrightarrow e^x-1=1 \\ &\Leftrightarrow e^x=2 \\ f(x)=x &\Leftrightarrow x=\ln 2 \end{aligned}$$

ولدينا $f(0)=1\neq 0$. إذن $x=\ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=x$ في $\mathbb{R}$.

2. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}^+$ ، لدينا : $f'(x)=\dfrac{-1-(x-1)e^x}{(e^x-1)^2}=-\dfrac{g(x)}{(e^x-1)^2}\leq 0$.

ولدينا : $f''(x)>0 \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}^*$. إذن f' تزايدية على $\mathbb{R}^+$.

إذن : $x\geq 0\Rightarrow f'(x)\geq f'(0)\Rightarrow f'(x)\geq -\dfrac{1}{2}$.

ومنه فإن : $\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad : \quad -\dfrac{1}{2}\leq f'(x)\leq 0$. إذن : $\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad : \quad -\dfrac{1}{2}\leq f'(x)\leq \dfrac{1}{2}$.

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad : \quad |f'(x)|\leq -\dfrac{1}{2}}$.

ب- لدينا f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ و f' متصلة على المجال $]0,+\infty[$. حسب مبرهنة **التزايدات المنتهية**، لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}^+; \quad \exists c\in\mathbb{R}^+ \ / \ f(x)-f(\ln 2)=f'(c)(x-\ln 2)$ حيث c محصور بين $\ln 2$ و x . إذن : $|f(x)-f(\ln 2)|=|f'(c)||x-\ln 2|$. وبما أن : $|f'(c)|\leq\dfrac{1}{2}$ و $f(\ln 2)=\ln 2$ ،

فإن : $\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad : \quad |f(x)-\ln 2|\leq\dfrac{1}{2}|x-\ln 2|$.

ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، لدينا $u_n\in\mathbb{R}^+$ ، لأن $f(\mathbb{R}^+)=]0,1]\subset\mathbb{R}^+$. إذن : $|f(u_n)-\ln 2|\leq\dfrac{1}{2}|u_n-\ln 2|$.

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad |u_{n+1}-\ln 2|\leq\dfrac{1}{2}|u_n-\ln 2|}$

ب- نبين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad |u_n-\ln 2|\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|u_0-\ln 2| \qquad (*)$.

العلاقة $(*)$ صحيحة من أجل $n=0$.

ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، نفترض أن العلاقة $(*)$ صحيحة من أجل n ونبين أنها صحيحة من أجل $n+1$.

لدينا : $|u_{n+2}-\ln 2|\le\frac{1}{2}|u_{n+1}-\ln 2|$ و $|u_n-\ln 2|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\ln 2|$.

إذن : $|u_{n+1}-\ln 2|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\frac{1}{2}\times|u_0-\ln 2|$. أي : $|u_{n+1}-\ln 2|\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|u_0-\ln 2|$.

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ :\ |u_n-\ln 2|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\ln 2|}$.

جـ- لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ |u_n-\ln 2|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|1-\ln 2|$ و $-1<\frac{1}{2}<1\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$.

حسب مصاديق التقارب ، لدينا $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ln 2}$.

IV. نعتبر F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} F(x)=\int_x^{2x}\frac{t}{e^t-1}dt & ;\quad x\neq 0\\ F(0)=0 \end{cases}$$

1. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}^*$. نعلم أن f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$ ، إذن :

إذا كان $x>0$ ، فإن :

$$\begin{aligned} x\le t\le 2x\quad&\Rightarrow\quad f(2x)\le f(t)\le f(x)\\ &\Rightarrow\int_x^{2x}f(2x)dt\le\int_x^{2x}f(t)dt\le\int_x^{2x}f(x)dt\\ &\Rightarrow\quad xf(2x)\le F(x)\le xf(x)\\ &\Rightarrow\quad\boxed{\frac{2x^2}{e^{2x}-1}\le F(x)\le\frac{x^2}{e^x-1}} \end{aligned}$$

إذا كان $x<0$ ، فإن :

$$\begin{aligned} 2x\le t\le x\quad&\Rightarrow\quad f(x)\le f(t)\le f(2x)\\ &\Rightarrow\int_{2x}^{x}f(x)dt\le\int_{2x}^{x}f(t)dt\le\int_{2x}^{x}f(2x)dt\\ &\Rightarrow\quad -xf(x)\le -F(x)\le -xf(2x)\\ &\Rightarrow\quad\boxed{\frac{2x^2}{e^{2x}-1}\le F(x)\le\frac{x^2}{e^x-1}} \end{aligned}$$

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^*\ :\ \frac{2x^2}{e^{2x}-1}\le F(x)\le\frac{x^2}{e^x-1}}$.

ب- لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}^* \ : \ \frac{2x^2}{e^{2x}-1}\le F(x)\le\frac{x^2}{e^x-1}$.

وبما أن : $\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\frac{e^x-1}{x}(e^x+1)}=\frac{0}{1\times2}=0$ و $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\frac{e^x-1}{x}}=\frac{0}{1}=0$

فإن : $\lim_{x\to0}F(x)=0=F(0)$ ، وبالتالي فإن F متصلة في 0 .

ج- لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}^* \ : \ \frac{2x^2}{e^{2x}-1}\le F(x)\le\frac{x^2}{e^x-1}$.

إذن : $\forall x\in\mathbb{R}^* \ : \ \frac{2x}{e^{2x}-1}\le\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\le\frac{x}{e^x-1}$.

وبما أن : $\lim_{x\to0}\frac{2x}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{2}{\frac{e^x-1}{x}(e^x+1)}=\frac{2}{1\times2}=1$ و $\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}=\frac{1}{1}=1$

فإن : $\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=1$ ، ومنه فإن F قابلة للاشتقاق في 0 و $\boxed{F'(0)=1}$.

2. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}^*$ ، لدينا $f \ : \ t\mapsto\frac{t}{e^t-1}$ دالة متصلة على المجال $[x,2x]$ أو $[2x,x]$ حسب إشارة x،فهي تقبل دالة أصلية φ على المجال $[x,2x]$ أو $[2x,x]$، و $\varphi'(x)=f(x) \ : \ \forall x\in\mathbb{R}^*$.

إذن : $F(x)=\int_x^{2x}\frac{t}{e^t-1}dt=\left[\varphi(t)\right]_x^{2x}=\varphi(2x)-\varphi(x)$.

لدينا φ و $x\mapsto2x$ قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و $\forall x\in\mathbb{R}^* \ : \ 2x\in\mathbb{R}^*$.

إذن : F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و لكل $x\in\mathbb{R}^*$ ، لدينا :

$$F'(x)=\left(\varphi(2x)-\varphi(x)\right)'=(2x)'\varphi'(2x)-\varphi'(x)=2\times\frac{2x}{e^{2x}-1}-\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{4}{e^x+1}f(x)-f(x)$$

$$F'(x)=\left(\frac{4}{e^x+1}-1\right)f(x)=\frac{3-e^x}{e^x+1}f(x)$$

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^* \ : \ F'(x)=\frac{3-e^x}{e^x+1}f(x)}$.

ب- نعلم أن f متصلة وتناقصية قطعا على المجال $]-\infty,+\infty[$.

إذن : $f(]-\infty,+\infty[)=]\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)[=]0,+\infty[$.ومنه فإن : $\forall x\in\mathbb{R} \ : \ f(x)>0$

وبما أن $F'(x)=\frac{3-e^x}{e^x+1}f(x) \ : \ \forall x\in\mathbb{R}^*$ ، فإن إشارة $F'(x)$ على $\mathbb{R}^*$ هي إشارة $(3-e^x)$.

$$3-e^x=0\Leftrightarrow e^x=3\Leftrightarrow\boxed{x=\ln3}$$

إذن : F تناقصية قطعا على المجال $[\ln3,+\infty[$ وتزايدية قطعا على كل من المجالين $]0,\ln3]$ و $]-\infty,0[$.

النهاية.

بما أن : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad : \quad \frac{2x^2}{e^{2x}-1} \le F(x) \le \frac{x^2}{e^x-1}$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x-1}=-\infty$ ، لأن $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$

فإن : $\boxed{\lim_{x\to-\infty}F(x)=-\infty}$ وبما أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{e^{2x}-1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{t^2}{e^t-1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{t^2}{e^t}\frac{1}{1-\frac{1}{e^t}}=0$ ،

حيث $t=2x$، لأن : $\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{e^t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{e^{\frac{1}{2}t}}\right)^2=\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{2u}{e^u}\right)^2=\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{2}{\frac{e^u}{u}}\right)^2=0$ وذلك بوضع $u=\frac{1}{2}t$ ،

و أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}=0$ ، فإن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}F(x)=0}$.

ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة F على $\mathbb{R}$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
$F'(x)$		$+$		0		$-$	
$F(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$F(\ln 3)$		$\searrow$	0

$$F(\ln 3)=\int_{\ln 3}^{2\ln 3}\frac{t}{e^t-1}dt=-\frac{3}{2}(\ln(3))^2-di\log(9)+di\log(3)\approx 0,4385061927$$

حيث : $di\log(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1-t}\,dt$ هي الدالة الأصلية للدالة $t\mapsto\frac{\ln t}{1-t}$ على والتي تنعدم في 1

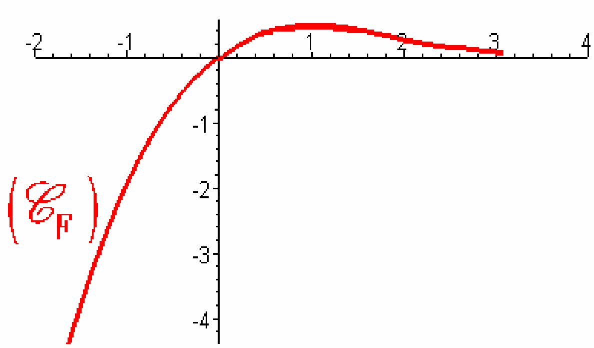
(**هذه الدالة خارج المقرر**)

$(\mathscr{C}_F)$ يقبل مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$ معادلته $y=0$.

لدينا $\lim_{x\to-\infty}F(x)=-\infty$ و لدينا $\forall x\in\mathbb{R}^* \quad : \quad \frac{2x}{e^{2x}-1}\le\frac{F(x)}{x}\le\frac{x}{e^x-1}$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^{2x}-1}=+\infty$

إذن : $\lim_{x\to-\infty}\frac{F(x)}{x}=+\infty$ ومنه فإن $(\mathscr{C}_F)$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $-\infty$ اتجاهه محور الأراتيب.

إنشاء المنحنى $(\mathscr{C}_F)$:



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي

المركز الوطني للامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
(الدورة الاستدراكية 2007)
الموضوع

المادة: الرياضيات
مدة الإنجاز: 4

الشعب(ة): العلوم الرياضية (أ) و (ب)
المعامل: 10

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

التمرين الأول (3 نقط)

نعتبر في $\mathbb{Z}$ النظمة (S) التالية : $\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$ حيث a و b و p و q أعداد صحيحة نسبية و $p \wedge q = 1$

0.5ن | 1 – أ) بين أنه يوجد زوج (u_0, v_0) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $pu_0 + qv_0 = 1$

0.5ن | ب) بين أن : $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ حل للنظمة (S).

0.5ن | 2 – ليكن x حلا للنظمة (S) . بين أن العدد pq يقسم العدد $x - x_0$

0.5ن | 3– ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث pq يقسم العدد $x - x_0$. بين أن x حل للنظمة (S) .

0.5ن | 4 – استنتج مجموعة حلول النظمة (S) .

0.5ن | 5 – حل في $\mathbb{Z}$ النظمة التالية : $\begin{cases} x \equiv 1\,[8] \\ x \equiv 3\,[13] \end{cases}$

التمرين الثاني (نقطتان)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا أكبر أو يساوي 3 .
لدينا n صندوقا مرقما من 1 إلى n . الصندوق رقم k $(1 \le k \le n)$ يحتوي على k كرة بيضاء و $n-k$ كرة سوداء .
نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق ثم نسحب منه كرة واحدة.

0.5ن | 1-احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء .

0.75ن | 2- احسب احتمال أن يتم السحب من صندوق رقمه فردي.

0.75ن | 3- احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء ، علما أن السحب تم من صندوق رقمه فردي.

التمرين الثالث (3 نقط)

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر المجموعة : $(H) = \{ M(z) \in (P) / z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 = 1 \}$

0.25ن | 1- أ) حدد معادلة ديكارتية للمجموعة (H)

0.5ن | ب) بين أن (H) هذلول و حدد مركزه و رأسيه و مقاربيه في المعلم $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

0.25ن | ج) انشئ (H) .

2- M(z) و M(z') نقطتان من (H) . نضع : $\varphi(z, z') = z\bar{z}' + \bar{z}z' - \bar{z}\bar{z}'$

0.5ن | أ) بين أن : $M(\varphi(z, z')) \in (H)$

0.5ن | ب) تحقق أن $\varphi(z, 1) = z$ وأن $\varphi(z, \bar{z}) = 1$.

1ن 3- نزود (H) بقانون التركيب الداخلي $*$ حيث لكل $M(z)$ و $M(z')$ من (H) :
$$M(z)*M(z')=M(\varphi(z,z'))$$
بين أن : $((H),*)$ زمرة تبادلية .

التمرين الرابع (3 نقط)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 . نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

نعتبر المجموعة التالية : $\mathcal{F}=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a+b & -b\\ 5b & a-3b\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ مزودة بجمع المصفوفات $(+)$ و ضرب مصفوفة في عدد حقيقي $(.)$ و ضرب المصفوفات $(\times)$.

نضع : $I=M(1,0)$ و $J=M(0,1)$ و $O=M(0,0)$

0.5ن 1-أ) بين أن $(\mathcal{F},+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

0.5ن ب) بين أن (I,J) أساس للفضاء المتجهي $(\mathcal{F},+,\cdot)$ واعط بعده .

0.5ن 2- ليكن α عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$
بين أن الأسرة $(1,\alpha)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,.)$

3- نعتبر التطبيق ψ من $\mathbb{C}$ نحو $\mathcal{F}$ المعرف بما يلي :
$\psi(z)=M(a,b)$ لكل عنصر z من $\mathbb{C}$ حيث : $z=a+\alpha b$ و a و b عددان حقيقيان .

0.5ن أ) تحقق أن : $J^2=-2(I+J)$ و أن : $\psi(\alpha)=J$

0.5ن ب) حدد قيمتي α التي يكون من أجلهما التطبيق ψ تشاكلا تقابليا من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(\mathcal{F},\times)$

0.5ن 4- نأخذ : $\alpha=-1+i$
اكتب في الأساس (I,J) المصفوفة J^{2007} .

التمرين الخامس (9 نقط)

I /1- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x)=1+x-e^{-x}$

0.25ن أ) ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

0.5ن ب) احسب $\lim_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)$ وضع جدول تغيرات g .

0.25ن ج) استنتج أن $x_0=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$.

2- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{1+x-e^{-x}}$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.5ن أ) احسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)$

0.25ن ب) احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$.

0.25ن ج) ضع جدول تغيرات الدالة f .

0.5ن د) أنشئ (C) .

0.5ن 3- أ) ليكن n من $\mathbb{N}^*$

بين أن المعادلة : $f(x) = n$ تقبل حلا وحيدا x_n في المجال $]0;+\infty[$.

0.5ن ب) بين أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ تناقصية وأنها متقاربة .

0.5ن ج) أثبت أن : $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$

0.25ن II/ 1- أ) بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تكافئ المعادلة $e^{-x} = x$

0.5ن ب) بين أن المعادلة $e^{-x} = x$ تقبل حلا وحيدا هو $\alpha = x_1$ وأن : $\frac{1}{e} \leq \alpha \leq 1$

2- نعتبر المتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $y_1 = 1$ و $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ y_{n+1} = e^{-y_n}$

0.5ن أ) بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$

0.5ن ب) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ;\ |y_{n+1} - \alpha| \leq e^{-\frac{1}{e}} |y_n - \alpha|$

0.5ن ج) استنتج أن $(y_n)_{n\geq 1}$ متقاربة محددا نهايتها.

III/ لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي : $F(0) = \frac{1}{2}\ell n 2$ و $\forall x > 0\ ;\ F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$

0.25ن 1- أ) بين أن : $\forall t > 0\ ;\ \frac{1}{1+t} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$

0.5ن ب) استنتج $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

0.5ن 2-أ) بين أن : $1 - t \leq e^{-t} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2} \qquad (\forall t \geq 0)$

0.5ن ب) بين أن لكل t من المجال $]0;4[$: $\frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right)$

0.25ن ج) استنتج أن F متصلة على اليمين في 0 .

0.5ن 3-أ) بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ واحسب $F'(x)$ من أجل $x > 0$

0.25ن ب) ادرس تغيرات F على $\mathbb{R}_+$.

الثانية علوم رياضية أ و ب	تصحيح الامتحان الوطني الموحد لدورة يوليوز 2007 الاستدراكية	ثانوية محمد الخامس - القنيطرة - الأستاذ محمد غريز

التمرين الاول

1 - أ - $(S)\ \begin{cases} x \equiv a\ [p] \\ x \equiv b\ [q] \end{cases}$

لدينا $p \wedge q = 1$ إذن حسب *Bezout* $\exists(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2 : pu_0 + qv_0 = 1$

ب - ليكن $x_0 = bpu_0 + aqv_0$

لدينا $x_0 \equiv aqv_0[p]$ و بما أن $pu_0 + qv_0 = 1$ فان $qv_0 \equiv 1[p]$

اذن $aqv_0 \equiv a[p]$ ومنه $x_0 \equiv a[p]$ (1)

لدينا $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ اذن $x_0 \equiv bp[q]$

و بما أن $pu_0 + qv_0 = 1$ فان $pu_0 \equiv 1[q]$ اذن $bpu_0 \equiv b[q]$

و منه $x_0 \equiv b[q]$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن x_0 حل للنظمة *(S)*

2 - ليكن x حلا للنظمة *(S)*

لدينا $\begin{cases} x \equiv a\ [p] \\ x \equiv b\ [q] \end{cases}$ و $\begin{cases} x_0 \equiv a\ [p] \\ x_0 \equiv b\ [q] \end{cases}$

اذن $x - x_0 \equiv 0[q]$ و $x - x_0 \equiv 0[p]$ أي $\exists(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : \begin{cases} x - x_0 = mp \\ x - x_0 = nq \end{cases}$

$q | x - x_0 \Rightarrow q | mp$ و بما أن $p \wedge q = 1$ فانه حسب مبرهنة *Gauss* $q | m$

اذن $m = k_1 q$ $(\exists k_1 \in \mathbb{Z})$

وبما أن $x - x_0 = mp$ فان $x - x_0 = k_1 pq$ اذن العدد pq يقسم العدد $x - x_0$

3 - ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث pq يقسم العدد $x - x_0$

لدينا $x - x_0 \equiv 0[pq]$ اذن $(\exists k \in \mathbb{Z}) : x - x_0 = kpq$

اذن $x - x_0 = (kp)q = (kq)p$ اذن $p | x - x_0$ و $q | x - x_0$ أي $\begin{cases} x \equiv x_0\ [p] \\ x \equiv x_0\ [q] \end{cases}$

وبما أن x_0 حل للنظمة *(S)* فان $\begin{cases} x_0 \equiv a[p] \\ x_0 \equiv b[q] \end{cases}$ اذن $\begin{cases} x \equiv a\ [p] \\ x \equiv b\ [q] \end{cases}$ اذن x حل للنظمة *(S)*

4 - لدينا $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ حل للنظمة *(S)*

اذن حلول النظمة *(S)* هي الأعداد النسبية x بحيث $x \equiv x_0[pq]$

5 - لدينا $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$

العددين 8 و 13 أوليان فيما بينهما اذن $\exists(u_0, v_0) = (5, -3)$ بحيث *8(5)+13(-3)=1*

لدينا $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ أي $x_0 = (3 \times 8 \times 5) + (1 \times 13 \times (-3)) = 120 - 39$

اذن $x_0 = 81$ حل للنظمة *(S)*

و بالتالي مجموعة حلول النظمة *(S)* هي الاعداد النسبية x بحيث $x \equiv 81[104]$

التمرين الثاني

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا أكبر من أو يساوي 3 . لدينا n صندوقا مرقما من 1 إلى n
الصندوق رقم k $(1 \le k \le n)$ يحتوي على k كرة بيضاء و $n-k$ كرة سوداء

1 - ليكن B الحدث الكرة المسحوبة بيضاء لكل k من $\{1,2............n\}$

نضع E_k الحدث اختيار الصندوق رقم k

لدينا $\Omega = E_1 \cup E_2 .... \cup E_n$ و $(k \neq p)$ $E_k \cap E_p = \varnothing$

$$p(B) = p(B \cap \Omega) = p(B \cap (E_1 \cup E_2 \cup .... \cup E_n))$$
$$p(B) = p((B \cap E_1) \cup (B \cap E_2) \cup .... \cup (B \cap E_n))$$
$$p(B) = p(B \cap E_1) + (B \cap E_2) + ... + (B \cap E_n)$$

لدينا $p_{E_k}(B) = \dfrac{p(B \cap E_k)}{p(E_k)}$ اذن $p(B \cap E_k) = p(E_k) \times p_{E_k}(B)$

اذن $p(B) = p(E_1) \times p_{E_1}(B) + p(E_2) \times p_{E_2}(B) + ...p(E_n) \times p_{E_n}(B)$

لدينا $p(E_1) = p(E_2) = ...p(E_n) = \dfrac{1}{n}$

و $p_{E_k}(B) = \dfrac{k}{n}$ (لان الصندوق رقم k يحتوي على k كرة بيضاء)

اذن $p(B) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n} + ... + \dfrac{n}{n}\right) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{n(n+1)}{2n}$

و بالتالي $\boxed{p(B) = \dfrac{(n+1)}{2n}}$

2 - ليكن I الحدث : الصندوق يحمل رقما فرديا

لدينا n فردي $n=2k+1$. عدد الصناديق التي تحمل رقما فرديا هو $\dfrac{(2k+1)+1}{2} = k+1$

اذن $p(I) = \dfrac{C^1_{k+1}}{C^1_n} = \dfrac{k+1}{n}$ وبما أن $n = 2k+1$ فإن $k = \dfrac{n-1}{2}$ اذن $p(I) = \dfrac{\dfrac{n-1}{2}+1}{n}$

و بالتالي $\boxed{p(I) = \dfrac{(n+1)}{2n}}$

3 - احتمال الحصول على كرة بيضاء علما أن السحب تم من صندوق رقمه فردي هو : $p_I(B) = \dfrac{p(B \cap I)}{p(I)}$

لدينا $I = E_1 \cup E_3 \cup E_5 \cup ....E_n$

اذن $p(B \cap I) = p(B \cap (E_1 \cup E_3 \cup E_5 \cup ....E_n))$
$$= p((B \cap E_1) \cup (B \cap E_3) \cup .... \cup (B \cap E_n))$$
$$= p(B \cap E_1) + (B \cap E_3) + ... + (B \cap E_n)$$

اذن $p(B \cap I) = p(E_1) \times p_{E_1}(B) + p(E_3) \times p_{E_3}(B) + ... + p(E_n) \times p_{E_n}(B)$

$$p(B \cap I) = \left(\frac{1}{n} \times \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} \times \frac{3}{n}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} \times \frac{n}{n}\right)$$
$$p(B \cap I) = \frac{1}{n^2}(1+3+5+................+n)$$

يمكن أن نبين بالترجع أن : $1+3+5+.......................+n = 1+3+5+..................................+2k+1$

$$= (k+1)^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \qquad (\text{لان } (n = 2k+1))$$

اذن $p(B \cap I) = \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$ اذن $p_I(B) = \dfrac{(n+1)^2}{4n^2} \times \dfrac{2n}{n+1}$ **و بالتالي** $\boxed{p_I(B) = \dfrac{n+1}{2n}}$

التمرين الثالث

نعتبر المجموعة $(H)=\left\{M(z)\in(P)/z^2+\bar{z}^2-|z|^2=1\right\}$

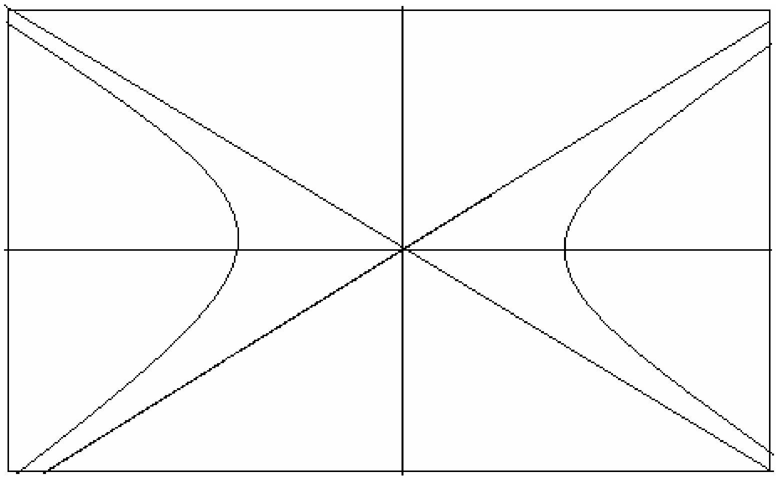
1 - أ - ليكن $z=x+iy$

$$M\in(H)\Leftrightarrow z^2+\bar{z}^2-|z|^2=1$$
$$\Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy+x^2-y^2-2ixy-x^2-y^2=1$$
$$\Leftrightarrow x^2-3y^2=1 \qquad (1)$$

(1) هي معادلة ديكارتية للمجموعة *(H)*

ب - بما أن معادلة المجموعة *(H)* هي : $\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=1$ فان *(H)* هذلول مركزه $O(0,0)$

و رأسيه $A(1,0)$ و $A'(-1,0)$ ومقاربيه $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ و $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$



2 - لتكن $M(z)$ و $M'(z)$ نقطتان من *(H)* . بحيث $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$

نضع $\varphi(z,z')=z\bar{z}'+\bar{z}z'-\overline{zz'}$

لدينا $z\bar{z}'=(xx'+yy')+i(x'y-xy')$ و $\bar{z}z'=(xx'+yy')+i(xy'-x'y)$

و $\overline{zz'}=(xx'-yy')-i(xy'+x'y)$ اذن $\varphi(z,z')=(xx'+3yy')+i(xy'+x'y)$

لدينا $(xx'+3yy')^2-3(xy'+x'y)^2=x^2x'^2+9y^2y'^2-3x^2y'^2-3x'^2y^2$

بما أن $M(z)$ و $M'(z')$ نقطتان من (H) فان $x'^2-3y'^2=1$ و $x^2-3y^2=1$

اذن $\left(x^2-3y^2\right)\left(x'^2-3y'^2\right)=1$ أي $x^2x'^2+9y^2y'^2-3x^2y'^2-3x'^2y^2=1$

و بالتالي $M(\varphi(z,z'))\in(H)$

ب - لدينا $\varphi(z,1)=z\times1+\bar{z}\times1-\bar{z}\times1=z$ و لدينا $\varphi(z,\bar{z})=z\times\bar{\bar{z}}+\bar{z}\times\bar{z}-\bar{z}\times z\ =z^2+\bar{z}^2-|z|^2$

وبما أن $M(z)\in(H)$ فان $z^2+\bar{z}^2-|z|^2=1$ و منه $\varphi(z,\bar{z})=1$

3 - نزود *(H)* بقانون التركيب الداخلي * حيث لكل $M(z)$ و $M(z')$ من *(H)* $M(z)*M(z')=M(\varphi(z,z'))$

لكل $M(z)$ و $M(z')$ و $M(z'')$

لدينا $M(z)*(M(z')*M(z''))=M(z)*M(\varphi(z',z''))$

$$=M(z)*M(z'\overline{z''}+\overline{z'}z''-\overline{z'z''})=M(\varphi(z,z'\overline{z''}+\overline{z'}z''-\overline{z'z''}))$$
$$=M(z(\overline{z'}z''+z'\overline{z''}-z'z'')+\bar{z}(z'\overline{z''}+\overline{z'}z''-\overline{z'z''})-\overline{z\overline{z'}z''}-\overline{zz'\overline{z''}}+\overline{zz'z''})$$
$$=M(z\overline{z'}z''+zz'\overline{z''}-zz'z''-\overline{zz'z''}+\bar{z}z'z'') \qquad (1)$$

$$(M(z)*M(z'))*M(z'')=M(z\overline{z'}+\overline{z}z'-\overline{z}\overline{z'})*M(z'')$$
$$=M(\varphi(z\overline{z'}+\overline{z}z'-\overline{z}\overline{z'},z''))$$
$$=M(z\overline{z'}\overline{z''}+\overline{z}z''\overline{z''}-\overline{z}\overline{z'}\overline{z''}+\overline{z}z'z''+z\overline{z'}z''-zz'z''-\overline{z}z'\overline{z''}-z\overline{z'}\overline{z''}+zz'\overline{z''})$$
$$=M(z\overline{z'}z''+zz'\overline{z''}-zz'z''-\overline{z}\overline{z'}\overline{z''}+\overline{z}z'z'') \qquad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن $M(z)*(M(z')*M(z''))=(M(z)*M(z'))*M(z'')$

اذن القانون * تجميعي

لدينا $M(z)*M(z')=M(\varphi(z,z'))=M(z\overline{z'}+\overline{z}z'-\overline{z}\overline{z'})$

و $M(z')*M(z)=M(\varphi(z',z))=M(z'\overline{z}+\overline{z'}z-\overline{z}\overline{z'})$

اذن $M(z)*M(z')=M(z')*M(z)$ لكل $M(z)$ و $M(z')$ من *(H)*

اذن القانون * تبادلي

لدينا $M(\varphi(z,1))=M(z)$ أي $M(z)*M(1)=M(z)$ لكل $M(z)$ من *(H)*

اذن $M(1)$ هو العنصر المحايد للقانون *

لدينا $M(\varphi(z,\overline{z}))=M(1)$ اذن $M(z)*M(\overline{z})=M(1)$

اذن كل عنصر $M(z)$ من *(H)* يقبل مماثلا في *(H)* هو $M(\overline{z})$ و بالتالي $((H),*)$ زمرة تبادلية

التمرين الرابع

$$F=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a+b & -b\\ 5b & a-3b\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

نضع $I=M(1,0)$ و $J=M(0,1)$ و $O=M(0,0)$

1 - أ - $F\subset M_2(\mathbb{R})$ و $F\neq\varnothing$ لان $O\in F$

لكل $M(a,b)$ و $M(c,d)$ من *F* $M(a,b)-M(c,d)=M(a-c,b-d)\in F$

اذن $(F,+)$ زمرة جزئية من الزمرة التبادلية $(M_2(R),+)$ اذن $(F,+)$ زمرة تبادلية

$\lambda.M=\lambda.(aI+bJ)=(\lambda a)I+(\lambda b)J$ $(\forall\lambda\in\mathbb{R})$ $\forall M(a,b)\in F$

اذن $\lambda.M\in F$ اذن *F* جزء مستقر بالنسبة للقانون الخارجي .

بما أن $F\subset M_2(\mathbb{R})$ و $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ فضاء متجهي حقيقي فان الخاصيات الأربع تبقى متحققة

$\alpha.(M+M')=\alpha.M+\alpha.M'$ $(\forall\alpha\in\mathbb{R})$ $\forall(M,M')\in F^2$

$(\alpha+\beta).M=\alpha.M+\beta M$ $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ $\forall M\in F$

$(\alpha\beta).M=\alpha.(\beta.M)$

$1.M=M$ $\forall M\in F$

اذن $(F,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي

ب - لدينا $M(a,b)=aI+bJ$ $(\forall M\in F)$ اذن الأسرة (I,J) مولدة للفضاء المتجهي الحقيقي *F*

$$\alpha I+\beta J=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \quad \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$
$$\Rightarrow\begin{pmatrix}\alpha+\beta & -\beta\\ 5\beta & \alpha-3\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$$

اذن الأسرة (I,J) حرة ومنه الأسرة (I,J) أساس للفضاء المتجهي *F*

عدد عناصر الأساس (I,J) هو 2 اذن $\dim F=2$

2 - ليكن α عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$

نضع $\alpha=x_1+iy_1$ حيث $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$

لكل z من $\mathbb{C}$ يوجد زوج وحيد (x,y) من $\mathbb{R}^2$ بحيث $z = x + iy$

هل يوجد زوج وحيد (β,γ) من $\mathbb{R}^2$ بحيث $z = \beta + \gamma\alpha$ ؟

$$x + iy = \beta + \gamma(x_1 + iy_1) \quad \Leftrightarrow \quad x + iy = \beta + \gamma x_1 + i\gamma y_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta + \gamma x_1 = x \\ \gamma y_1 = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \dfrac{y}{y_1} \\ \beta + \dfrac{x_1}{y_1} y = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = x - \dfrac{x_1}{y_1} y \\ \gamma = \dfrac{y}{y_1} \end{cases}$$

لكل z من $\mathbb{C}$ يوجد زوج وحيد (β,γ) من $\mathbb{R}^2$ بحيث $z = \beta.1 + \gamma.\alpha$

و بالتالي : $(1,\alpha)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C},+,.)$

3 - $\psi : \mathbb{C} \to F$

$z \to \psi(z) = M(a,b)$ لكل عنصر z من $\mathbb{C}$ حيث $z = a + \alpha b$ $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

أ - لدينا $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ اذن $J^2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$

و لدينا $I + J = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ اذن $J^2 = -2(I + J)$

لدينا $\psi(\alpha) = \psi(0 + \alpha 1)$ اذن $\psi(\alpha) = M(0,1) = J$

ب - ليكن $z = a + \alpha b$ و $z' = a' + \alpha b'$ عنصران من $\mathbb{C}$

لدينا
$$\psi(z.z') = \psi((a + \alpha b)(a' + \alpha b'))$$
$$= \psi(aa' + (ab' + a'b)\alpha + \alpha^2 bb')$$

ولدينا
$$\psi(z) \times \psi(z') = M(a,b) \times M(a',b')$$
$$= (aI + bJ) \times (a'I + b'J)$$
$$= aa'I + (ab' + a'b)J + bb'J^2 = aa'I + (ab' + a'b)J + bb'(-2I - 2J)$$
$$= (aa' - 2bb')I + (ab' + a'b - 2bb')J$$
$$= M(aa' - 2bb', ab' + a'b - 2bb')$$
$$= \psi((aa' - 2bb') + \alpha(ab' + a'b - 2bb'))$$

لكي يكون ψ تشاكلا تقابليا يجب أن يكون : $aa' + (ab' + a'b)\alpha + \alpha^2 bb' = (aa' - 2bb') + \alpha(ab' + a'b - 2bb')$

اذن $\alpha^2 bb' = -2bb' - 2\alpha bb'$ أي $\alpha^2 + 2\alpha + 2 = 0$

لدينا $\Delta' = 1 - 2 = -1$ اذن $\alpha = -1 + i$ أو $\alpha = -1 - i$

4 - نأخذ $\alpha = -1 + i$

لدينا $\psi(\alpha) = J$ و $\psi(\alpha^{2007}) = \psi(\underbrace{\alpha.\alpha................\alpha}_{2007\text{مـــرة}})$

اذن (لان ψ تشاكل من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(F,\times)$) $\psi(\alpha^{2007}) = \psi(\alpha).\psi(\alpha)..................\psi(\alpha)$

اذن $\psi(\alpha^{2007}) = J^{2007}$

حسب صيغة *Moivre* لدينا

$$\alpha^{2007} = (-1 + i)^{2007} = (\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}))^{2007} = (\sqrt{2})^{2007}(\cos\frac{3\pi}{4}.2007 + i\sin\frac{3\pi}{4}.2007)$$

اذن
$$\alpha^{2007} = (\sqrt{2})^{2007}(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}) = (\sqrt{2})^{2007}(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{-2^{1004}}{2} - i\frac{2^{1004}}{2}$$

اذن $\alpha^{2007} = -2^{1003} - i2^{1003} = -2^{1003}(1+i) = -2^{1003}(-1+i+2) = -2^{1004} - 2^{1003}(-1+i)$

$\alpha^{2007} = -2^{1004} + \alpha(-2^{1003})$

نعلم أن $\psi(z) = M(a,b)$ أي $\psi(a+\alpha b) = M(a,b)$

$$\psi(\alpha^{2007}) = J^{2007} \Leftrightarrow \psi(-2^{1004} + \alpha(-2^{1003})) = J^{2007}$$
$$\Leftrightarrow M(-2^{1004}, -2^{1003}) = J^{2007}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{J^{2007} = -2^{1004} I - 2^{1003} J}$$

التمرين الخامس

I) 1 - $g(x) = 1 + x - e^{-x}$

أ - $g'(x) = 1 + x - e^{-x} \succ 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ اذن g تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

ب - $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + x - e^{-x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + x(1 - \frac{1}{xe^{x}})$

$= (-\infty)(-(-\infty)) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + x - e^{-x}$

$= +\infty$

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ 0 $\nearrow$ $+\infty$

ج - g متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ اذن g تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$

و بما أن $g(0) = 0$ فان $x_0 = 0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$

2 - لدينا $f(x) = \frac{1}{1 + x - e^{-x}}$

أ - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$

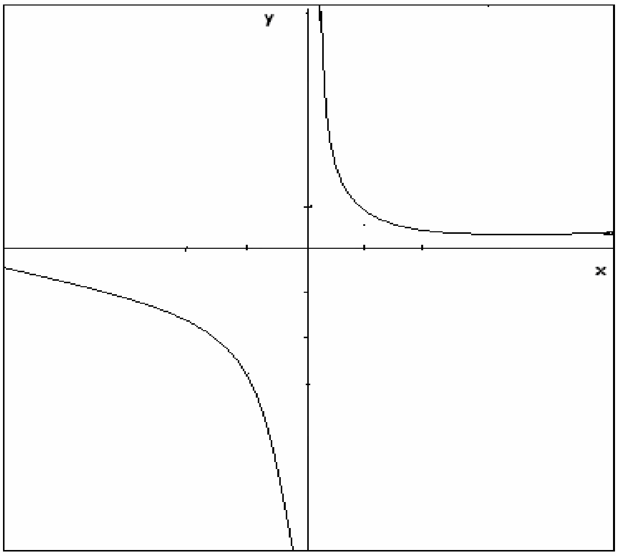
$\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ x\succ0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ x\succ0}} \frac{1}{1+x-e^{-x}} = \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ x\succ0}} \frac{1}{\frac{e^{x}-1}{e^{x}} + x} = +\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ x\prec0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ x\prec0}} \frac{1}{\frac{e^{x}-1}{x} + x} = -\infty$

ب - لدينا $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f'(x) = \frac{-(1+x-e^{-x})'}{(1+x-e^{-x})^2} = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$

ج - بما أن $g'(x) \succ 0$ فان $f'(x) \prec 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	‖	-
$f(x)$	0 $\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$ 0

د -



3 - أ - ليكن n من $\mathbb{N}^*$

لتكن $h(x)=f(x)-n$ لدينا $\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)-n=-n$ و $\lim_{x\to0+} h(x)=+\infty-n=+\infty$

$h'(x)=f'(x)\prec 0 \quad (\forall x\in\mathbb{R}^{*+})$. اذن h تناقصية قطعا على $\mathbb{R}^{*+}$

بما أن متصلة و تناقصية قطعا على $\mathbb{R}^{*+}$ فان h تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $]-n,+\infty[$

اذن يوجد عدد حقيقي وحيد x_n من $]0,+\infty[$ بحيث $h(x_n)=0$

اذن المعادلة $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا x_n في المجال $]0,+\infty[$

ب - لدينا $f(x_n)=n$ و $f(x_{n+1})=n+1$ اذن $f(x_{n+1})\succ f(x_n)$

وبما أن f تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ فان $x_{n+1}\prec x_n$ اذن المتتالية (x_n) تناقصية

لدينا $x_n\in]0,+\infty[$ اذن (x_n) مصغورة بالعدد 0

و بما أن (x_n) تناقصية و مصغورة بالعدد 0 فان (x_n) متقاربة

ج - لتكن $\ell=\lim_{n\to\infty} x_n$

$$f(x_n)=n \Leftrightarrow \frac{1}{1+x_n-e^{-x_n}}=n$$

$$\Leftrightarrow 1+x_n-e^{-x_n}=\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(1+x_n-e^{-x_n})=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow 1+\ell-e^{-\ell}=0$$

$$\Leftrightarrow 1+\ell=e^{-\ell}$$

نفترض أن $\ell\succ 0$

اذن $1+\ell\succ 1$ و $-\ell\prec 0$ أي $e^{-\ell}\prec 1$ اذن $1+\ell\succ 1$ و $e^{-\ell}\prec 1$ غير ممكن

اذن $\ell=0$ و بالتالي $\lim_{n\to+\infty} x_n=0$

II) 1 - أ - $f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x-e^{-x}}=1$

$$\Leftrightarrow 1+x-e^{-x}=1$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}=x$$

ب - حسب س 3 - أ - المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا $\alpha=x_1\succ 0$

لنبين أن $\frac{1}{e} \le \alpha \le 1$

لتكن $u(x) = f(x) - 1$ لدينا u متصلة على $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ و $u'(x) = f'(x) \succ 0$ اذن u تناقصية قطعا $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$

لدينا $u(1) \times u(\frac{1}{e}) \prec 0$ اذن حسب مبرهنة القيم الوسطية المعادلة $e^{-x} = x$ تقبل حلا وحيدا $\frac{1}{e} \prec \alpha \prec 1$

2 - أ - لدينا $y_1 = 1$ و $y_{n+1} = e^{-y_n}$

من أجل $n = 1$ لدينا $y_1 = 1$ اذن $\frac{1}{e} \le y_1 \le 1$

نفترض أن $\frac{1}{e} \le y_n \le 1$ و نبين أن $\frac{1}{e} \le y_{n+1} \le 1$

لدينا $\frac{1}{e} \le y_n \le 1$ اذن $-1 \le -y_n \le -\frac{1}{e}$ أي $-1 \le -y_n \le 0$

اذن $e^{-1} \le e^{-y_n} \le 1$ أي $\frac{1}{e} \le y_{n+1} \le 1$

و بالتالي $\frac{1}{e} \le y_n \le 1$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

ب - لتكن $f(x) = e^{-x}$ f متصلة على المجال المغلوق الذي طرفاه α و y_n

و قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح الذي طرفاه α و y_n

اذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية يوجد عدد حقيقي c محصور بين α و y_n

بحيث $|f(y_n) - f(\alpha)| = |f'(c)||y_n - \alpha|$ اذن $|y_{n+1} - \alpha| = |f'(c)||y_n - \alpha|$

لدينا $f'(x) = -e^{-x}$ اذن $f'(c) = -e^{-c}$ أي $|f'(c)| = e^{-c}$

لدينا $\alpha \prec c \prec y_n$ اذن $-y_n \prec -c \prec -\alpha$

و بما أن $\frac{1}{e} \prec \alpha \prec 1$ فان $-1 \prec -\alpha \prec -\frac{1}{e}$

اذن $0 \prec e^{-c} \prec e^{-\alpha} \prec e^{-\frac{1}{e}}$

و بالتالي $|y_{n+1} - \alpha| \le e^{-\frac{1}{e}}|y_n - \alpha|$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ج - لدينا $|y_2 - \alpha| \le e^{-\frac{1}{e}}|y_1 - \alpha|$

$|y_3 - \alpha| \le e^{-\frac{1}{e}}|y_2 - \alpha|$

....

$|y_n - \alpha| \le e^{-\frac{1}{e}}|y_{n-1} - \alpha|$

اذن $|y_n - \alpha| \le (e^{-\frac{1}{e}})^{n-1}|y_1 - \alpha|$ و منه $|y_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}\right)^{n-1}|y_1 - \alpha|$

بما أن $\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}\right)^{n-1} = 0$ فان (y_n) متقاربة و $\lim_{n \to +\infty} y_n = \alpha$

III) لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :
$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt, x \succ 0 \\ F(0) = \frac{1}{2}\ln 2 \end{cases}$$

1 - أ - لدينا $t \succ 0$ اذن $-t \prec 0$ أي $e^{-t} \prec 1$ اذن $t + e^{-t} \prec 1 + t$ أي $t \prec 1 + t - e^{-t}$

اذن $\frac{1}{1 + t - e^{-t}} \prec \frac{1}{t}$ أي $f(t) \prec \frac{1}{t}$ *(1)*

لدينا $-e^{-t} \prec 0$ اذن $1+t-e^{-t} \prec 1+t$ إذن $\frac{1}{1+t} \prec \frac{1}{1+t-e^{-t}}$ أي $\frac{1}{1+t} \prec f(t)$ *(2)*

من *(1)* و *(2)* نستنتج أن $\frac{1}{1+t} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$ $(\forall t \succ 0)$

ب - لدينا $\frac{1}{1+t} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$

اذن $\int_x^{2x} \frac{1}{1+t} dt \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{x} \frac{1}{t} dt$ $(x \succ 0)$

اذن $\ln(1+2x) - \ln(1+x) \leq F(x) \leq \ln(2x) - \ln(x)$

اذن $\ln(\frac{1+2x}{1+x}) \leq F(x) \leq \ln(\frac{2x}{x}) = \ln(2)$

و بما أن $\lim_{x \to +\infty} \ln(\frac{1+2x}{1+x}) = \ln 2$ فان $\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = \ln 2}$

2 - أ - لنبين أن $1-t \leq e^{-t} \leq 1-t+\frac{t^2}{2}$ $(\forall t \geq 0)$

لتكن $u(t) = 1-t$ و $v(t) = e^{-t}$

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على $[0,+\infty[$ و $u(0)=1$ و $v(0)=1$

$v'(t) = -e^{-t}$ و $u'(t) = -1$ $\forall t \in [0,+\infty[$

لدينا $t \geq 0$ اذن $-t \leq 0$ أي $e^{-t} \leq 1$ اي $-1 \leq -e^{-t}$ أي $u'(t) \leq v'(t)$

اذن $u(t) \leq v(t)$ لكل $(t \geq 0)$ *(1)*

لتكن $w(t) = 1-t+\frac{t^2}{2}$ لدينا $w(0)=1$ و $u(0)=1$

$w'(t) = -1+t$ $\forall t \in [0,+\infty[$

بما أن $u(t) \leq v(t)$ فان $1-t \leq e^{-t}$ أي $-e^{-t} \leq -1+t$

اذن $v'(t) \leq w'(t)$

و منه $v(t) \leq w(t)$ لكل $(t \geq 0)$ *(2)*

من *(1)* و *(2)* نستنتج أن $u(t) \leq v(t) \leq w(t)$

و بالتالي $1-t \leq e^{-t} \leq 1-t+\frac{t^2}{2}$ $(\forall t \geq 0)$

ب - لدينا $1-t \leq e^{-t}$ لكل $t \geq 0$

اذن $1-e^{-t} \leq t$ أي $1+t-e^{-t} \leq 2t$ اي $\frac{1}{2t} \leq \frac{1}{1+t-e^{-t}}$

اذن $\frac{1}{2t} \leq f(t)$ *(1)*

لدينا
$$\frac{1}{2}(\frac{1}{t}+\frac{1}{4-t}) - f(t) = \frac{1}{2}(\frac{1}{t}+\frac{1}{4-t}) - \frac{1}{1+t-e^{-t}}$$
$$= \frac{2-2t+t^2-2e^{-t}}{t(4-t)(1+t-e^{-t})}$$

بما أن $e^{-t} \leq 1-t+\frac{t^2}{2}$ فان $2-2t+t^2-2e^{-t} \geq 0$

و بما أن $f(t) \succ 0$ لكل $(t \succ 0)$ فان $1+t-e^{-t} \succ 0$

و لدينا $t(4-t) \succ 0$ لان $0 \prec t \prec 4$

اذن $f(t) \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{t}+\frac{1}{4-t})$ *(2)*

من *(1)* و *(2)* نستنتج أن $\frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{t}+\frac{1}{4-t})$ لكل t من $]0,4[$

ج - لدينا $\frac{1}{2t} \le f(t) \le \frac{1}{2}(\frac{1}{t}+\frac{1}{4-t})$

اذن $\int_x^{2x} \frac{1}{2t}dt \le \int_x^{2x} f(t)dt \le \int_x^{2x} \frac{1}{2}(\frac{1}{t}+\frac{1}{4-t})dt$ أي $\frac{1}{2}[\ln t]_x^{2x} \le F(x) \le \frac{1}{2}[\ln t-\ln(4-t)]_x^{2x}$

أي $\frac{\ln 2}{2} \le F(x) \le \frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}\ln(\frac{4-2x}{4-x})$

و بما أن $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\frac{4-2x}{4-x}\right)=\ln 1=0$ فان $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\frac{\ln 2}{2}=F(0)$

اذن F متصلة في $x_0=0$

3 - أ - لدينا $F(x)=\int_x^{2x} f(t)dt$

f متصلة على $[x,2x]$ اذن f تقبل دالة أصلية φ على $[x,2x]$ بحيث φ قابلة للاشتقاق على $[x,2x]$ $(x \succ 0)$

و $\varphi'(x)=f(x)$

لدينا $F(x)=[\varphi(t)]_x^{2x}=\varphi(2x)-\varphi(x)$

الدالة $x \to \varphi(x)$ قابلة للاشتقاق على $[x,2x]$

الدالة $x \to \varphi(2x)$ قابلة للاشتقاق على $[x,2x]$ لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق

اذن F قابلة للاشتقاق على $[x,2x]$ حيث $(x \succ 0)$

اذن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$

$$F'(x)=\varphi'(2x).2-\varphi'(x)=2f(2x)-f(x) \qquad \left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right)$$

$$F'(x)=\frac{2}{1+2x-e^{-2x}}-\frac{1}{1+x-e^{-x}}$$

$$=\frac{1-\frac{2}{e^x}+\frac{1}{e^{2x}}}{g(x).g(2x)}=\frac{e^{2x}-2e^x+1}{e^{2x}.g(x).g(2x)}$$

$$F'(x)=\frac{(e^x-1)^2}{e^{2x}.g(x).g(2x)}$$

ب - لدينا $(e^x-1)^2 \ge 0$ و $g(x) \succ 0$ و $g(2x) \succ 0$ لكل x من $\mathbb{R}^{*+}$

اذن F تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^{*+}$

SUJET DE BACCALAURÉAT (MAROC , Juin 2006)

EPREUVE DE MATHEMATIQUES, FILIERE SCIENCES MATH

La durée de l'épreuve est de 4 heures, coefficient 10 et l'usage des calculatrices NON programmables est autorisé.

Exercice 1 (3,5 Points)

On note G l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ s'écrivant sous la forme $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

On rappelle que $\left(M_2(\mathbb{R}), +, \times\right)$ est un anneau unitaire.

Partie I

1. Montrer que G est une partie stable de $\left(M_2(\mathbb{R}), \times\right)$.
2. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe. Ce groupe est-il commutatif ?
3. Soit H l'ensemble des matrices $M_{(a,b)}$ de G telles que $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

   Montrer que H est un sous groupe de $(G, \times)$.
4. Soit A un élément de G tel que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

   On pose $A = A^1$, $A^2 = A \times A$ et $A^{n+1} = A^n \times A$ pour tout entier naturel non nul n.

   Donner l'expression de A^n en fonction de a et de n.

Partie II

Pour tout (a,b) et (x,y) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, on définit la loi de composition interne T par :

$(a,b) T (x,y) = (a + bx, by)$

Soit φ l'application définie de G vers $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ par : $\forall (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, on a $\varphi\left(M_{(a,b)}\right) = (a,b)$.

1. Montrer que φ est un morphisme bijectif de $(G, \times)$ vers $\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, T\right)$.
2. En déduire la structure algébrique de $\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, T\right)$.

3. Pour tout réel a et pour tout entier naturel $n \geq 2$, déterminer le symétrique de $\underbrace{(a,1)T(a,1)T\ldots\ldots\ldots\ldots(a,1)T}_{\text{n fois}}$ dans $\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*, T\right)$.

EXERCICE 2 (2,5 Points)

On considère dans $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ l'équation $x^2(x+y)=y^2(x-y)^2$, on note (E) cette équation.

1. Soit le couple (x,y) une solution de (E).
   On pose $d=PGCD(x,y)$, $x=a\,d$ et $y=b\,d$.
   a. Vérifier que $d\,b^2(a-b)^2=(a+b)a^2$.
   b. En déduire que $b=1$.
   c. Montrer que $a\neq 1$ et que $(a-1)$ divise $(a+1)$.
   d. En déduire que $a=2$ ou $a=3$.
2. Résoudre dans $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ l'équation (E).

EXERCICE 3 (5 Points)

Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z)=z^2-(2+6i)z$.

Partie I

Dans le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$, on considère l'ensemble des points M d'affixe z tels que $P(z)$ est imaginaire pur. On note (H) cet ensemble.

1. Montrer que $x^2-y^2-2x+6y=0$ est une équation cartésienne de (H).
2. Montrer que (H) est une hyperbole puis déterminer son centre, ses sommets ainsi que deux équations de ses asymptotes dans le repère $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.
3. Vérifier que le point O (Origine du repère) est un point de (H) puis donner une équation cartésienne de la tangente à (H) au point O dans le repère $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.
4. Tracer (H) dans le repère $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.

Partie II

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=4-6i$.
2. On pose $u=1+5i$, $v=1+i$, $w=239-i$, $\alpha=\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)$ et $\beta=\arctan\left(\dfrac{1}{239}\right)$.

a. Vérifier que $u^4 \times v = 4w$.
b. Exprimer un argument de u en fonction de α et un argument de w en fonction de β.
c. En déduire que $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$.

EXERCICE 4 (9 Points)

Partie I

Dans cette partie, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3

On considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g_n(x) = nx + 2\ln(x)$.

1. Dresser le tableau de variations de g_n.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\sqrt{x} > \ln(x)$.
3.
   a. Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}_+^*$ une unique solution notée α_n, puis montrer que $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$.
   b. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$.

Partie II

I. Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt[3]{x}\, e^{-x}$.

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On prend $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3$ cm.

1. Etudier la dérivabilité de f à droite de zéro puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.
3.
   a. Montrer que pour tout réel x appartenant à $]0, +\infty[$, $f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x)$.
   b. Dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer C_f. On prendra $f\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,5$.

II. On pose $I = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

1.

   a. Montrer que $f(I) \subset I$.

   b. A l'aide de la question 3.a de la Partie II, montrer que $\forall x \in I$, $\left|f^{'}(x)\right| \leq \frac{2}{3}$.

   c. Montrer que $\left[x = \alpha_3 \Leftrightarrow (x > 0 \text{ et } f(x) = x)\right]$, où α_3 est la solution de l'équation $g_3(x) = 0$ (Cf. Partie I).

2. Soit $\left(u_n\right)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et pour entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a. Montrer que pour entier naturel n, $u_n \in I$.

   b. Montrer que pour entier naturel n, $\left|u_{n+1} - \alpha_3\right| \leq \frac{2}{3}\left|u_n - \alpha_3\right|$.

   c. En déduire que pour entier naturel n, $\left|u_n - \alpha_3\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

   d. Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n \geq 0}$ est convergente et donner sa limite.

Partie III

Soit F la fonction définie sur $\left[0, +\infty\right[$ par $F(x) = \int_x^{8x} f(t)\,dt$.

1.

   a. Montrer que F est dérivable sur $\left[0, +\infty\right[$.

   b. Donner l'expression de $F^{'}(x)$ pour tout x appartenant à $\left[0, +\infty\right[$ et en déduire le sens de variations de F.

2.

   a. Montrer que pour tout x appartenant à $\left[0, +\infty\right[$, on a $0 \leq F(x) \leq 2f(x)\left(1 - e^{-7x}\right)$.

   b. En déduire la valeur de $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

   c. Dresser le tableau de variations de F.

FIN DU SUJET

الإمتحان الوطني الموحد للبكالوريا

مادة : الرياضيات

شعبة : العلوم الرياضية

الدورة العادية : يونيو 2006

إنجاز : محمد أيت الحسين

أستاذ بثانوية مولاي رشيد : فاس

التمرين الأول

الجزء الأول :

1) لدينا لكل $(a,a',b,b')\in\mathbb{R}^4$ بحيث $b\neq 0$ و $b'\neq 0$:

$$M_{(a,b)}\times M_{(a',b')}=\begin{pmatrix}1&0\\a&b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\a'&b'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\a+ba'&bb'\end{pmatrix}=M_{(a+ba',bb')}$$

بما أن : $bb'\neq 0$ فإن : $M_{(a+ba',bb')}\in G$ ومنه : G مستقرة في $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

2) المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ تحقق : $I=M_{(0,1)}$. إذن I هو العنصر المحايد ل $(G,\times)$.

ليكن $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ بحيث $b\neq 0$. لدينا : $\det\left(M_{(a,b)}\right)=b\neq 0$

إذن : $M_{(a,b)}$ تقبل مقلوبا في $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ وهو :

$$\left(M_{(a,b)}\right)^{-1}=\frac{1}{b}\begin{pmatrix}b&0\\-a&1\end{pmatrix}$$

نلاحظ أن : $\left(M_{(a,b)}\right)^{-1}=M_{\left(-\frac{a}{b},\frac{1}{b}\right)}\in G$

$\times$ تجميعي في $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ إذن في G بالأحرى.

من كل ما سبق نستنتج أن : $(G,\times)$ زمرة.

حسب ما سبق أعلاه لدينا لكل $(a,a',b)\in\mathbb{R}^3$ بحيث $b\neq 0$:

$M_{(a,b)}\times M_{(a',b)}=M_{(a',b)}\times M_{(a,b)}$ إذا وفقط إذا :

$a+ba'=a'+ba$ إذا وفقط إذا :

$(a-a')(1-b)=0$ أي : $b=1$ أو $a=a'$.

يكفي إذن أن نختار $(a,a',b)\in\mathbb{R}^3$ بحيث :

$b\neq 1$ و $a\neq a'$ لكي تكون :

$$M_{(a,b)}\times M_{(a',b)}\neq M_{(a',b)}\times M_{(a,b)}$$

مثلا : $(a,a',b)=(0,1,-1)$ نجد :

$$M_{(0,-1)}\times M_{(1,-1)}=M_{(-1,-1)}$$

و $M_{(1,-1)} \times M_{(0,-1)} = M_{(1,-1)}$

إذن الزمرة $(G,\times)$ ليست تبادلية.

3) $H \subset G$ و $H \neq \varnothing$ لأن : $M_{(0,1)} \in H$.

لكل $(b,b') \in \mathbb{R}^2$ لدينا :

$$(b > 0 \text{ و } b' > 0\ ) \Rightarrow bb' > 0$$

إذن H مستقرة قي $(G,\times)$.

و لدينا لكل عدد حقيقي b : $b > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{b} > 0$

إذن :

$$M_{(a,b)} \in H \Rightarrow (M_{(a,b)})^{-1} = M_{\left(-\frac{a}{b},\frac{1}{b}\right)} \in H$$

إذن H مستقرة بالمقلوب. ومنه H زمرة جزئية للزمرة $(G,\times)$.

4) لدينا : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{pmatrix}$

لنبين بالترجع أن : $P(n):\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$

لدينا $P(1)$ صحيحة .

نفترض أن $P(n)$.إذن :

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n+1)a & 1 \end{pmatrix}$$

ومنه : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

<u>الجزء الثاني :</u>

1) φ معرف لأن :

$$(\forall (a,a',b,b') \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{*2})\ M_{(a,b)} = M_{(a',b')} \Rightarrow (a,b) = (a',b')$$

φ شمولي لأن : (a,b) يقبل $M_{(a,b)}$ سابقا له.

φ تبايني لأن :

$$\varphi(M_{(a,b)}) = \varphi(M_{(a',b')}) \Rightarrow (a,b) = (a'b')$$

$$\Rightarrow M_{(a,b)} = M_{(a',b')}$$

إذن φ تقابل .

φ تشاكل لأن : لكل $(a,a',b,b') \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{*2}$

$$\varphi\left(M_{(a,b)} \times M_{(a',b')}\right) = \varphi\left(M_{(a+ba',bb')}\right)$$

$$= (a+ba',bb') = (a,b)T(a',b')$$

$$= \left(\varphi\left(M_{(a,b)}\right)\right)T\left(\varphi\left(M_{(a',b')}\right)\right)$$

2) $\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,T\right)$ زمرة غير تبادلية لأنها صورة زمرة غير تبادلية بتشاكل تقابلي.

ملاحظة : العنصر المحايد لهذه الزمرة هو : $\varphi\left(M_{(0,1)}\right)=(0,1)$

ومماثل (a,b) هو :

$$(a,b)'=\left(\varphi\left(M_{(a,b)}\right)^{-1}\right)=\varphi\left(M_{\left(-\frac{a}{b},\frac{1}{b}\right)}\right)=\left(-\frac{a}{b},\frac{1}{b}\right)$$

3)

$$((a,1)T\ldots T(a,1))'=\left(\varphi\left(M_{(a,1)}\right)T\ldots T\varphi\left(M_{(a,1)}\right)\right)'$$

$$=\left(\varphi\left(\left(M_{(a,1)}\right)\times\ldots\times\left(M_{(a,1)}\right)\right)\right)'=\left(\varphi\left(\left(M_{(a,1)}\right)^{n}\right)\right)'$$

$$=\left(\varphi\left(M_{(na,1)}\right)\right)'=\varphi\left(\left(M_{(na,1)}\right)^{-1}\right)$$

$$=\varphi\left(M_{(-na,1)}\right)=(-na,1)$$

ملخص : $\boxed{((a,1)T\ldots T(a,1))'=(-na,1)}$

التمرين الثاني :

1) أ) بالتعويض المباشر نجد :

$$a^2d^2(ad+bd)=b^2d^2(ad-bd)^2$$

وبما أن : $d\neq 0$ فإن :

$$\boxed{a^2(a+b)=b^2d(a-b)^2}$$

(اختزلنا ب d^3).

ب) لدينا حسب أ) : $b|(a+b)a^2$ و بما أن : $d=x\wedge y$ فإن :

$a\wedge b=1$ ومنه أيضا : $a^2\wedge b=1$ ومنه حسب مبرهنة كوص :

$b|(a+b)$. إذن $b|(a+b)-b=a$

أي : $a\wedge b=b$ ومنه : $\boxed{b=1}$

ج) تصبح المتساوية أعلاه في أ) :

$$d(a-1)^2=(a+1)a^2$$

ومنه : $a=1\Rightarrow(a=-1$ أو $a=0)$

هذا يعني بالخصوص أن العبارة $a=1$ خاطئة.

إذن : $\boxed{a\neq 1}$

لدينا إذن : $(a-1)|(a+1)a^2$

ونعلم أن : $(a-1)\wedge a=1$) حسب متطابقة بوزو والعلاقة :

$a-(a-1)=1$) إذن كما سبق : $(a-1)\wedge a^2=1$ ومنه حسب

مبرهنة كوص :

$$\boxed{(a-1)\mid(a+1)}$$

د) لدينا :

$$\begin{cases}(a-1)|(a+1)\\(a-1)|(a-1)\end{cases}\Rightarrow(a-1)|((a+1)-(a-1))$$

ومنه : $(a-1)|2$.

وبما أن $a-1>0$ فإن : $a-1\in\{1,2\}$

أي : $\boxed{a=2 \text{ أو } a=3}$

2) لدينا حسب ما سبق : إذا كان (x,y) حلا للمعادلة (E) فإنه يوجد

$d\in\mathbb{N}^*$ بحيث :

$$\begin{cases}x=da\\y=d\\a\in\{2,3\}\\d(a-1)^2=(a+1)a^2\end{cases}$$

إذا كان $a=2$ فإن : $d=12$

إذا كان $a=3$ فإن : $d=9$.

ومنه : $(x,y)\in\{(24,2),(27,9)\}$

بإنجاز الحساب تحققنا من كون الزوجين أعلاه حلين للمعادلة ومنه

مجموعة الحلول :

$$\boxed{S=\{(24,2),(27,9)\}}$$

التمرين الثالث :

الجزء الأول :

1) نضع : $z=x+yi$ بحيث : $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.لدينا :

$$\begin{aligned}M(z)\in(H)&\Leftrightarrow Re(P(z))=0\\&\Leftrightarrow Re(x^2-y^2+2ixy-(2+6i)(x+yi))=0\\&\Leftrightarrow Re((x^2-y^2-2x+6y)+i(2xy-6x-2y))=0\\&\Leftrightarrow x^2-y^2-2x+6y=0\end{aligned}$$

ومنه : $\boxed{x^2-y^2-2x+6y=0}$ معادلة ديكارتية ل (H) .

2) لدينا :

$$x^2-y^2-2x+6y=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-(y-3)^2=-8$$
$$\Leftrightarrow \frac{X^2}{\left(\sqrt{8}\right)^2}-\frac{Y^2}{\left(\sqrt{8}\right)^2}=-1$$

بحيث : $\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-3 \end{cases}$

ومنه (H) هذلول مركزه هو : $\Omega(1,3)$ و :

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{8}\right)^2}-\frac{Y^2}{\left(\sqrt{8}\right)^2}=-1$$

معادلة له في المعلم : $\left(\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.

الرأسان : لدينا : $a=b=\sqrt{8}$ ومنه الرأسان : $A\left(0,\sqrt{8}\right)$ و $A'\left(0,-\sqrt{8}\right)$ في المعلم $\left(\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$ أي : $A\left(1,3+\sqrt{8}\right)$ و $A'\left(3,3-\sqrt{8}\right)$ في المعلم $\left(\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.

المقاربان : معادلتا المقاربين في المعلم $\left(\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$:

$$(D):\ Y=X \quad \text{و} \quad (D'):\ Y=-X$$

ومنه معادلتيهما في المعلم $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$:

$$(D):\ y-3=x-1 \quad \text{و} \quad (D'):\ y-3=1-x$$

أي : $\boxed{(D):y=x+2 \quad \text{و} \quad (D'):\ y-3=-x+4}$

ملحوظة : لم تطلب العناصر المميزة لكن نعطيها إتماما للفائدة :

لدينا : $a=b=\sqrt{8}$ ومنه : $c=\sqrt{a^2+b^2}=4$

ومنه التباعد المركزي : $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{\sqrt{8}}=\sqrt{2}$

البؤرة : $F(0,4)$. الدليل المرتبط بها : $(\Delta):Y=\frac{a^2}{c}=2$

البؤرة : $F(0,-4)$. الدليل المرتبط بها : $(\Delta):Y=-\frac{a^2}{c}=-2$

في المعلم $\left(\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.

4) الإنشاء : انظر الشكل أسفله.

<u>الجزء الثاني :</u>

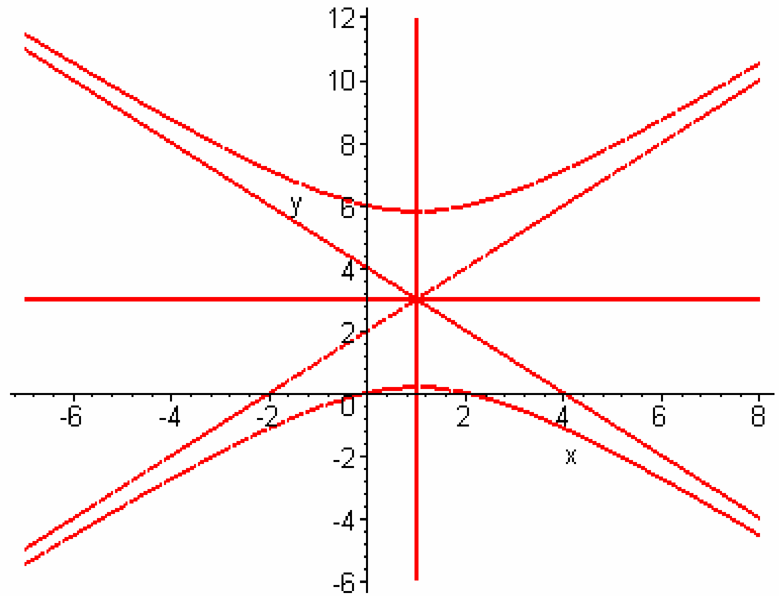
1) المعادلة : $P(z)=4-6i$ تكافئ :

$$z^2-(2+6i)z-4+6i=0$$

مميزها المختصر هو : $\Delta'=(1+3i)^2+4-6i=-4=(2i)^2$.

ومنه جذراها : $z_1=1+3i-2i=1+i$ و

$$z_2=1+3i+2i=1+5i$$



ومنه مجموعة حلولها : $\boxed{S = \{1+i, 1+5i\}}$

2) أ) لدينا باستعمال صيغة حدانية نيوتن : $u^4 = 476 - 480i$

ومنه : $u^4 v = 956 - 4i = 4(239 - i)$. إذن :

$$\boxed{u^4 v = 4w \qquad (1)}$$

ب) لدينا : $\tan(\arg(u)) = 5$ و $\sin(\arg(u)) = \frac{5}{26} > 0$

ومنه : $\arg(u) \equiv \operatorname{Arctan}(5) \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha \quad [2\pi]$

بالمثل : $\tan(\arg(w)) = -\frac{1}{239}$ و

$\sin(\arg(w)) = -\frac{1}{169\sqrt{2}} < 0$ إذن :

$$\arg(w) \equiv -\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) \quad [2\pi]$$

ملخص : $\boxed{\arg(u) \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha \quad [2\pi] \quad \arg(w) \equiv -\beta \quad [2\pi]}$

ج) من العلاقة (1) أعلاه نستنتج أن :

$$\arg(u^4 v) \equiv \arg(4w) \quad [2\pi]$$

ومنه : $2\pi - 4\alpha + \frac{\pi}{4} \equiv -\beta \quad [2\pi]$. إذن :

$$\boxed{4\alpha - \beta \equiv \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \qquad (2)}$$

من جهة أخرى :

$$0 < \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < 4\alpha < \pi$$

و $0 < \frac{1}{239} < 1 \Leftarrow\Rightarrow 0 < \beta < \frac{\pi}{4}$

ومنه : $-\frac{\pi}{4} < 4\alpha - \beta < \pi$

ومن (2) أعلاه نستنتج أن : $(\exists k\in\mathbb{Z})\ \ 4\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}+k2\pi$

ومن المتفاوتة المزدوجة أعلاه نحصل على :

$-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+k2\pi<\pi$ أي : $-\frac{1}{2}<k<\frac{3}{4}$ ومنه : $k=0$

إذن : $4\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$ ومنه :

$$\boxed{4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)=\frac{\pi}{4}}$$

التمرين الرابع :

الجزء الأول :

1) لدينا : $(\forall x>0)\ g_n{}'(x)=n+\frac{2}{x}>0$ ومنه الدالة g_n تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ ومنه جدول تغيراتها

x	0	
$g_n{}'(x)$	‖	$+$
$g_n(x)$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

2) لندرس تغيرات الدالة : $x\mapsto u(x)=\sqrt{x}-\ln x$. لدينا :

$$(\forall x>0)\ u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-2\right)$$

و منه : $u'(x)>0\Leftrightarrow x>4$ و $u'(x)=0\Leftrightarrow x=4$

وهذا يعني بالخصوص أن $u(4)$ قيمة دنيا مطلقة للدالة u.

إذن : $(\forall x>0)\ u(x)\geq u(4)=2-\ln 4=2(1-\ln 2)>0$

لأن : $1-\ln(2)=\ln(e)-\ln(2)$ و $e>2$ و $\ln$ تزايدية قطعا.

إذن : $$\boxed{\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ \ \sqrt{x}-\ln x>0}$$

3) أ) الدالة g_n متصلة وتزايدية قطعا على المجال $I=]0,+\infty[$

إذن g_n تقابل من I نحو $g_n(I)$.لدينا حسب السؤال 1) :

$$g_n(I)=\mathbb{R}$$

بالخصوص 0 يقبل سابقا وحيدا α_n ب g_n في I.

لدينا : $g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{n}-\ln(n)>0$ حسب السؤال 2)

و : $g_n\left(\frac{1}{n}\right)=1-2\ln(n)<0$ لأن : $n\geq 3$. هذا يعني أن :

$$g_n\left(\frac{1}{n}\right)<g_n\left(\alpha_n\right)<g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

وبما أن g_n تزايدية قطعا فإن : $\boxed{\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}}$

ب) لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$ ومنه : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0}$

الجزء الثاني :

(I) 1) لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}\, e^{-x} = +\infty$

ومنه الدالة f لا تقبل الإشتقاق في 0 على اليمين و منحناها يقبل

نصف مماس موازي لمحور الأراتيب في النقطة O أصل المعلم .

2) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 0}$ لأن :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 0$$

ومنه **(C) يقبل محور الأفاصيل مقاربا له بجوار $+\infty$.**

3) أ) لدينا لكل $x > 0$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\right)e^{-x} = \left(\frac{1}{3}x^{-1} - 1\right)x^{\frac{1}{3}}e^{-x} = \frac{1-3x}{3x} f(x)$$

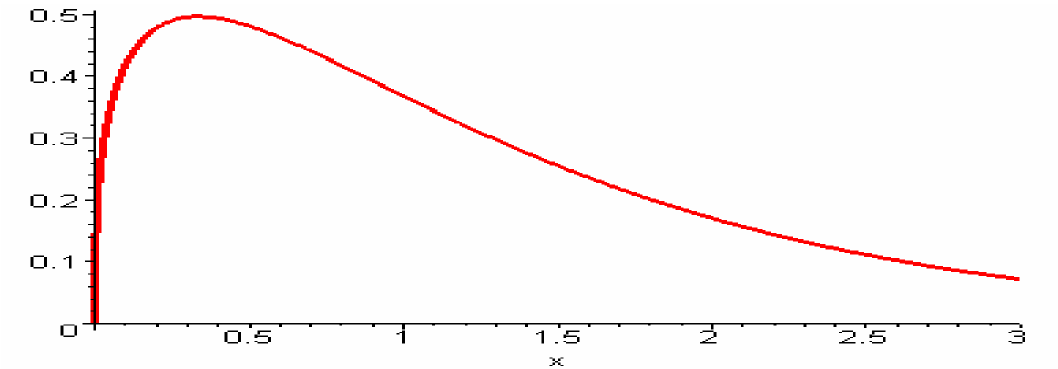
إذن : $\boxed{(\forall x > 0)\ f'(x) = \frac{1-3x}{3x} f(x)}$

ب) حسب ما سبق فإن إشارة f' هي إشارة : $x \mapsto -3x+1$ ومنه

جدول التغيرات للدالة f :

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$		$-$	
$f(x)$	0	↗	$f(\frac{1}{3})$	↘	0

4) منحنى الدالة f :



(II) $I=\left[\frac{1}{3},1\right]$

1) أ) حسب الدراسة المنجزة أعلاه فإن f متصلة وتناقصية قطعا

على I ومنه : $f(I)=\left[f(1),f\left(\frac{1}{3}\right)\right]$

لدينا : $f\left(\frac{1}{3}\right)<0,5<1$ و $f(1)=\frac{1}{e}>\frac{1}{3}$ إذن :

$$\frac{1}{3}<f(1)<f\left(\frac{1}{3}\right)<1$$

ومنه : $\boxed{f(I)\subset I}$

ب) لدينا : $(\forall x\in I)\ \ f'(x)=v(x)f(x)$ بحيث $v(x)=\frac{1-3x}{3x}$

و هي دالة متخاطة تناقصية قطعا على I (لأن : المحددة :

($\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-3<0$) ومنه : $v(I)=\left[v(1),v\left(\frac{1}{3}\right)\right]=\left[-\frac{2}{3},0\right]$

بالخصوص : $(\forall x\in I)\ \ |v(x)|\le\frac{2}{3}$ وبما أن :

$$(\forall x\in I)\ \ |f(x)|\le 1$$

فإن : $(\forall x\in I)\ \ |f'(x)|=|v(x)|\,|f(x)|\le\frac{2}{3}$

ملخص : $\boxed{(\forall x\in I)\ \ |f'(x)|\le\frac{2}{3}}$

ج) لدينا

$$\begin{cases}x>0\\ f(x)=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x^{\frac{1}{3}}e^{-x}=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \frac{1}{3}\ln(x)-x=\ln(x)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \ln(x)-3x=3\ln(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ g_3(x)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\alpha_3$$

2) أ) بالترجع : $u_0=\frac{1}{3}\in I$: واضح .

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n\in I\Rightarrow u_{n+1}=f(u_n)\in f(I)\subset I\Rightarrow u_{n+1}\in I$$

ومنه : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n\in I}$

ب) حسب السؤال 1) ج) فإن : $f(\alpha_3)=\alpha_3$. وحسب السؤال 3) أ)

فإن : $\frac{1}{3}<\alpha_3<\frac{1}{\sqrt{3}}$ ومنه : $\alpha_3\in I$.

لكل $n\in\mathbb{N}$: $|u_{n+1}-\alpha_3|=|f(u_n)-f(\alpha_3)|$

بما أن f قابلة للإشتقاق على I و بما أن كلا من u_n و α_3 عنصران من I فإنه حسب مبرهنة التزايدات المنتهية يو جد عنصر c_n ما بين u_n و α_3 بحيث :

$$f(u_n)-f(\alpha_3)=f'(c_n)(u_n-\alpha_n)$$

ومنه :

$$|u_{n+1}-\alpha_3|=|f'(c_n)||u_n-\alpha_n|\le\frac{2}{3}|u_n-\alpha_n|$$

لأن : $c_n\in I$

إذن :

$$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N})|u_{n+1}-\alpha_3|\le\frac{2}{3}|u_n-\alpha_n|}$$

ج) بالترجع :

لأجل : $n=0$ يكفي أن نبين أن :

$$\left|\alpha_3-\frac{1}{3}\right|\le\frac{2}{3}$$

نعلم أن : $\frac{1}{3}<\alpha_3<\frac{1}{\sqrt{3}}$ ومنه :

$$\left|\alpha_3-\frac{1}{3}\right|\le\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}-1}{3}<\frac{2}{3}$$ لأن : $\sqrt{3}<3$

نفترض أن : $|u_n-\alpha_3|\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ لأجل $n\in\mathbb{N}$.

حسب نتيجة السؤال ب) أعلاه :

$$|u_{n+1}-\alpha_3|\le\frac{2}{3}|u_n-\alpha_3|\le\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$$

ومنه :

$$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ |u_n-\alpha_3|\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$$

د) المتتالية الهندسية $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ تؤول إلى 0 لأن : $\left|\frac{2}{3}\right|<1$ وحسب المتفاوتة أعلاه فإن:

$$\boxed{\text{المتتالية}\ (u_n)_{n\ge0}\ \text{متقاربة و}\ \lim_{n\to+\infty}u_n=\alpha_3}$$

$$(\mathrm{III})\qquad (\forall x\in[0,+\infty[)\quad F(x)=\int_x^{8x}f(t)dt$$

1) أ) الدالة f متصلة على $[0,+\infty[$ إذن تقبل دالة أصلية G على $[0,+\infty[$ ومنه :

$$(\forall x\in[0,+\infty[)\quad F(x)=G(8x)-G(x)$$

إذن F كفرق مركبات دوال قابلة للإشتقاق تقبل الإشتقاق على $[0,+\infty[$.

ب) لدينا لكل x من $[0,+\infty[$:

$$F'(x)=8G'(8x)-G'(x)=8f(8x)-f(x)$$

أي : $F'(x)=16\sqrt[3]{x}\,e^{-8x}-\sqrt[3]{x}e^{-x}=\sqrt[3]{x}e^{-x}\left(16e^{-7x}-1\right)$

$$(\forall x\in[0,+\infty[)\ F'(x)=\sqrt[3]{x}\ e^{-x}\left(16e^{-7x}-1\right)$$

ومنه :

$$(\forall x\in[0,+\infty[)\ F'(x)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ أو } x=\frac{4\ln(2)}{7}$$

$$(\forall x\in[0,+\infty[)\ F'(x)>0\Leftrightarrow 16e^{-7x}>1\Leftrightarrow x<\frac{4\ln(2)}{7}$$

ومنه تغيرات F :

× F تزايدية قطعا على : $\left[0,\frac{4\ln 2}{7}\right]$

× F تناقصية قطعا على : $\left[\frac{4\ln 2}{7},+\infty\right[$

× $F\left(\frac{4\ln 2}{7}\right)$ قيمة قصوى مطلقة للدالة F.

2) أ) ليكن : $x\in\mathbb{R}^+$. لدينا : $x\le 8x$ ومنه :

$$(\forall t\in[x,8x])\ \sqrt[3]{t}\le\sqrt[3]{8x}=2\sqrt[3]{x}$$

إذن : $F(x)=\int_x^{8x}\sqrt[3]{t}\,e^{-t}dt\le 2\sqrt[3]{x}\int_x^{8x}e^{-t}dt$

$$=2\sqrt[3]{x}\left[-e^{-t}\right]_x^{8x}=2\sqrt[3]{x}\left(e^{-x}-e^{-8x}\right)$$

$$=2\sqrt[3]{x}\,e^{-x}(1-e^{-7x})=2f(x)(1-e^{-7x})$$

وبما أن $f\ge 0$ على $[x,8x]$ فإن : $F(x)\ge 0$ ومنه :

$$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ 0\le F(x)\le 2f(x)(1-e^{-7x})}$$

ب) نعلم أن : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ و لدينا : $\lim_{x\to+\infty}(1-e^{-7x})=1$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\left(2f(x)(1-e^{-7x})\right)=0$ وحسب المتفاوتة المزدوجة أعلاه فإن :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}F(x)=0}$$

ج) جدول التغيرات للدالة F :

x	0	$\frac{4\ln 2}{7}$	$+\infty$
$F'(x)$	$+$		$-$
$F(x)$	0 ↗	$F\left(\frac{4\ln 2}{7}\right)$	↘ 0

التمرين الثالث (3,5 ن)

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

ليكن (Γ) المنحنى الذي معادلته $2y^2-4y-7x=0$.

I – 1) بين أن (Γ) شلجم وحدد رأسه وبؤرته. 0,75

2) أنشئ المنحنى (Γ) في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$. 0,25

II – نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 2(y-1)^2 = 7x+2$

1) ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E).

أ – بين أن : $y=0[7]$ أو $y=2[7]$. 1

ب – استنتج أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : 0,5

$S=\{(14k^2-4k,7k) \;/\; k\in\mathbb{Z}\}\cup\{(14k^2+4k,7k+2)\;/\;k\in\mathbb{Z}\}$.

2) حدد النقط $M(x,y)$ من المنحنى (Γ) بحيث : $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ و $x\wedge y=9$. 1

التمرين الرابع (3 ن)

1) بين أن : $\dfrac{t}{1+t^2}-\dfrac{t}{3+t^2}+\dfrac{1}{3+t^2}=\dfrac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}$ $(\forall t\in\mathbb{R})$. 0,25

2) بين أن : $\displaystyle\int_0^{\alpha}\frac{1}{3+t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{3}}Arc\tan\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)$ $(\forall\alpha\in\mathbb{R})$. 0,5

3) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,\pi]$ بما يلي : $F(x)=\displaystyle\int_0^{x}\frac{1+\sin u}{2+\cos u}du$.

أ – بين أن F دالة قابلة للاشتقاق على $[0,\pi]$. 0,25

ب – باستعمال مكاملة بتغيير المتغير $t=\tan\dfrac{u}{2}$ ، بين أن : 0,75

$$(\forall x\in[0,\pi[)\quad F(x)=2\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}dt$$.

(نذكر أن : $\cos u=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ و $\sin u=\dfrac{2t}{1+t^2}$ حيث $t=\tan\dfrac{u}{2}$ و $u\in[0,\pi[$)

ج – باستعمال السؤالين 1) و 2) ، بين أن : 0,75

$$(\forall x\in[0,\pi[)\quad F(x)=\ln 3+\frac{2}{\sqrt{3}}Arc\tan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+\ln\left(\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{3+\tan^2\frac{x}{2}}\right)$$.

د – باستعمال اتصال الدالة F ، بين أن : $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1+\sin u}{2+\cos u}du=\ln 3+\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. 0,5

.../...

CA0207061940

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي
قطاع التربية الوطنية

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2005

المادة : الرياضيات	الشعبة : العلوم الرياضية (أ و ب)	المدة : 4ساعات	المعامل : 10

التمرين الأول :

نعتبر في $\mathbb{R}^2$ قانون التركيب الداخلي* المعرف بما يلي :

لكل (a,b) و (x,y) من $\mathbb{R}^2$: $(a,b)*\ x,y = \left(\frac{ax+by}{2}, \frac{ay+bx}{2}\right)$

لتكن المجموعة: $E=\left\{\left(m+\frac{1}{m}, m \quad \frac{1}{m}\right) \quad \mathbb{R}^2 / m \quad \mathbb{R}^*\right\}$

1) بين أن* قانون داخلي في المجموعة E

2) ليكن التطبيق φ المعرف من $\mathbb{R}^*$ نحو E بما يلي:- $(\forall m\in\mathbb{R}^*)\ \varphi(m) \quad \left(m \quad \frac{1}{m}, m \quad \frac{1}{m}\right)$

أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$

ب) استنتج أن $(E,*)$ زمرة تبادلية محددا عنصرها المحايدومماثل كل عنصر $\left(m+\frac{1}{m}, m-\frac{1}{m}\right)$ حيث عدد m حقيقي غير منعدم .

3) نعتبر المجموعة $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x \quad 2$ و $y^2 \geqq x^2-4\ \}$

أ) بين أن : $F=\left\{\left(m+\frac{1}{m}, m-\frac{1}{m}\right) \quad \mathbb{R}^2 / m \quad 0\right\}$

ب) بين أن $(F,*)$ زمرة جزئية من $(E,*)$

التمرين الثاني:

الجزء الأول :

p عدد صحيح طبيعي أولي أكبر أو يساوي من 5

1) بين ان : $p^2 \equiv 1\,[3]$

2) أ) باستعمال زوجية العدد p ، بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي q بحيث

$$p^2-1=4q(q+1)$$

ب) استنتج أن: $p^2 \equiv 1\ [8]$

3) بين أن : $p^2 \equiv 1\ [24]$

الجزء الثاني :

ليكن a عددا صحيحا طبيعيا أوليا مع العدد 24 .

1) بين أن : $a^2 \equiv 1\ [24]$

2) هل توجد أعداد صحيحة طبيعية a_1 ، ... ، a_{23} حيث : $a_k \wedge 24 = 1$ لكل k من $\{1,...,23\}$ و

23997 $a_1^2+...+a_{23}^2$ ؟ ($a_k \wedge 24$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a_k و 24)

التمرين الثالث

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=(x+2)e^{-\frac{2}{x}} \ ; \ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

ليكن $\mathcal{C}_f$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

1) أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0

ب) بين أن f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0

ج) بين أن f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$

2) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) بين أن :+ $(\forall t \geq 0)\ \ 0 \leq e^{-t}\ \ t\ \ 1\ \ \frac{t^2}{2}$ $\leq$

ج) بين ان :- $(\forall x>0)\ \ -\frac{4}{x}\ \ f(x)\ \ x\leq\ \ \frac{4}{x^2}\ \ \frac{2}{x}$

د) استنتج أن المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقبل مقاربا مائلا (Δ) ينبغي تحديد معادلة له .

3) أنشئ المنحنى $\mathcal{C}_f$ و المستقيم (Δ)

الجزء الثاني

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f_n(x) = \left(x + \dfrac{2}{n}\right) e^{-\frac{2}{x}} \quad ; \quad x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

1) بين أن f_n قابلة للإشتقاق على اليمين في 0.

2) ادرس تغيرات الدالة f_n على المجال $[0,+\infty[$

3) ا) بين أن، لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، المعادلة $f_n(x) = \dfrac{2}{n}$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0.+\infty[$

ب) بين أن : $(\forall x>0)(\forall n \quad \mathbb{N}^*)\ f_{n+1}(x) \quad \dfrac{2}{n+1} \quad f_n(x) \quad \dfrac{2}{n}$

ج) استنتج أن المتتالية (a_n) تناقصية ثم بين أن (a_n) متقاربة .

نضع : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$

د) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} \quad 2$

هـ) بين أن $a = 0$.

الجزء الثالث

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$$

(f هي الدالة المعرفة في الجزء الأول)

1) أ) بين أن : $(\forall x>0) \quad xf(x) \quad F(x) \quad xf(2x)$

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

2) أ) بين أن F قابلة للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$

ب) بين أن :

$$\begin{cases} F'(x) = e^{-\frac{2}{x}}\left(\left(x+2\right)\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \quad (3x \quad 2)e^{\frac{1}{x}}\right); \quad x \quad 0 \\ F_d'(0) = 0 \end{cases}$$

($F_d'(0)$ هو العدد المشتق للدالة F في 0 على اليمين)

3) أعط جدول التغيرات الدالة F

التمرين الرابع

لكل عدد عقدي z مخالف للعدد -1 ، نضع : $f(z) = \dfrac{iz-1}{(z+1)^2}$

1) أ) حدد العدد الحقيقي y بحيث : $f(iy) = iy$

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(z) = z \quad (E)$

نرمز ب z_0 و z_1 و z_2 لحلول المعادلة (E) حيث $Re(z_0)=0$ و $Re(z_1)>Re(z_2)$

2) أ) تحقق أن : $z_1+1=e^{i\frac{11\pi}{6}}$ و $z_2+1=e^{i\frac{7\pi}{6}}$

ب) استنتج الكتابة المثلثية لكل من العددين z_1 و z_2

3) في هذا السؤال نفترض أن $z=e^{i\alpha}$ حيث $0\leq\alpha<\pi$.

أ) بين أن : $\overline{f(z)}=izf(z)$

ب) حدد α إذا علمت أن : $f(z)+\overline{f(z)}=0$

ج) اكتب$f(z)$ على الشكل $f(z)=re^{i\varphi}$ حيث : $(r,\varphi)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$

4) حدد z إذا علمت أن $\begin{cases}|z|=1\\ Re(z)=\frac{1}{2}\end{cases}$

انتهى

التمرين 1 :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2;\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2;\quad (a,b)*(x,y)=\left(\frac{ax+by}{2},\frac{ay+bx}{2}\right)$$

$$E=\left\{\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)\in\mathbb{R}^2 / m\in\mathbb{R}^*\right\}$$

1) ليكن $X(m)=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)$ و $X(n)=\left(n+\frac{1}{n},n-\frac{1}{n}\right)$ عنصرين من المجموعة E ؛ إذن $m\in\mathbb{R}^*$ و $n\in\mathbb{R}^*$.

لدينا :

$$X(m)*X(n)=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)*\left(n+\frac{1}{n},n-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\left(\frac{\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(n+\frac{1}{n}\right)+\left(m-\frac{1}{m}\right)\left(n-\frac{1}{n}\right)}{2},\frac{\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(n-\frac{1}{n}\right)+\left(m-\frac{1}{m}\right)\left(n+\frac{1}{n}\right)}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{mn+\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+\frac{1}{mn}+mn-\frac{m}{n}-\frac{n}{m}+\frac{1}{mn}}{2},\frac{mn-\frac{m}{n}+\frac{n}{m}-\frac{1}{mn}+mn+\frac{m}{n}-\frac{n}{m}-\frac{1}{mn}}{2}\right)$$

$$=\left(mn+\frac{1}{mn},mn-\frac{1}{mn}\right)$$

$$\boxed{X(m)*X(n)=X(mn)}$$

وبما أن $m\in\mathbb{R}^*$ و $n\in\mathbb{R}^*$, فإن $mn\in\mathbb{R}^*$. وعليه فإن : $X(m)*X(n)\in E$.

وبالتالي فإن : $\forall(X,Y)\in E^2; X*Y\in E$. إذن * قانون داخلي في المجموعة E .

2) لدينا :

$$\begin{array}{rccl}\varphi: & \mathbb{R}^* & \to & E \\ & m & \mapsto & \varphi(m)=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)\end{array}.$$

أ)

i . ليكن $(m,n)\in\mathbb{R}^{*2}$, لدينا : $\varphi(mn)=\left(mn+\frac{1}{mn},mn-\frac{1}{mn}\right)=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)*\left(n+\frac{1}{n},n-\frac{1}{n}\right)=\varphi(m)*\varphi(n)$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$. $\boxed{\forall(m,n)\in\mathbb{R}^{*2}:\quad \varphi(mn)=\varphi(m)*\varphi(n)}$

ii . ليكن $X\in E$, إذن: $\exists! m\in\mathbb{R}^* / X=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)$ ؛ ومنه $\exists! m\in\mathbb{R}^* / X=\varphi(m)$ ؛ وعليه فإن φ تقابل من $\mathbb{R}^*$ نحو E

وبالتالي فإن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$.

ب) بما أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$ وأن $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية , فإن $(E,*)$ زمرة تبادلية .

لدينا 1 هو العنصر المحايد بالنسبة للقانون $\times$ في $(\mathbb{R}^*,\times)$, ومنه فإن العنصر المحايد بالنسبة للقانون * في $(E,*)$ هو : $\boxed{\varphi(1)=(2,0)}$.

ليكن $\varphi(m)=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)$ عنصرا من E . مماثل $\varphi(m)$ بالنسبة للقانون * في $(E,*)$ هو :

$$\boxed{(\varphi(m))'=\varphi(m^{-1})=\varphi\left(\frac{1}{m}\right)=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{\frac{1}{m}},\frac{1}{m}-\frac{1}{\frac{1}{m}}\right)=\left(\frac{1}{m}+m,\frac{1}{m}-m\right)} . \quad \left(m\neq 0\Rightarrow\frac{1}{m}\neq 0\right)$$

3) نعتبر المجموعة : $F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\geq 2 \text{ و } y^2=x^2-4\right\}$

أ) نضع : $G=\left\{\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)\in\mathbb{R}^2 / m>0\right\}$. لنبين أن : $F=G$ ؟

<u>$G\subset F$</u> : ليكن $X=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)\in G$, إذن $m>0$. لدينا :

$$\left(m+\frac{1}{m}\right)^2-4=m^2+2+\frac{1}{m^2}-4=m^2-2+\frac{1}{m^2}=\left(m-\frac{1}{m}\right)^2 .$$

<u>تذكير</u> : $\boxed{\forall(a,b)\in\mathbb{R}^{+^2} :\quad a+b\geq 2\sqrt{ab}}$. <u>تطبيق</u>: $m+\frac{1}{m}\geq 2\sqrt{m\times\frac{1}{m}}\Rightarrow\boxed{m+\frac{1}{m}\geq 2}$

وبناءا على ما سبق , نجد : $X\in F$. ومنه نستنتج أن $G\subset F$.

<u>$F\subset G$</u>: ليكن $(x,y)\in F$, إذن : $x\geq 2$ و $y^2=x^2-4$. نبحث عن $m>0$ بحيث : $(x,y)=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)$ ؟

$$(x,y)=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}m+\frac{1}{m}=x\\ m-\frac{1}{m}=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m=x+y\\ \frac{2}{m}=x-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{x+y}{2}\\ m=\frac{2}{x-y}\end{cases}$$

ونعلم أن : (لأن $x\neq y$) $y^2=x^2-4\Rightarrow x^2-y^2=4\Rightarrow(x+y)(x-y)=4\Rightarrow\frac{x+y}{2}=\frac{2}{x-y}$

من أجل $m=\frac{x+y}{2}$, لدينا : $(x,y)=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)$. لنبين أن : $m>0$ ؟

لدينا $(x+y)(x-y)=4>0$, إذن $x+y$ و $x-y$ لهما نفس الإشارة . ولدينا $x\geq 2>0$. إذن :

$y\geq 0\Rightarrow x+y\geq x>0$ و $y\leq 0\Rightarrow -y\geq 0\Rightarrow x-y\geq x>0\Rightarrow x+y>0$. ومنه فإن : $m=\frac{x+y}{2}>0$.

إذن $(x,y)\in G$. ومنه نجد : $F\subset G$.

وبالتالي فإن : $F=G$.

ب) لدينا : i . $F=\left\{\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)\in\mathbb{R}^2 / m>0\right\}\subset E$.

ii . $F\neq\varnothing$ لأن من أجل $m=1$, لدينا : $(2,0)\in F$.

iii . ليكن $X=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)$ و $Y=\left(n+\frac{1}{n},n-\frac{1}{n}\right)$ عنصرين من المجموعة F .إذن :

$$X*Y'=\varphi(m)*\varphi(n)'=\varphi(m)*\varphi\left(\frac{1}{n}\right)=\varphi\left(\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m},\frac{m}{n}-\frac{n}{m}\right) \text{ و } \begin{cases}m>0\\ n>0\end{cases}\Rightarrow\frac{m}{n}>0 .$$

ومنه فإن : $X*Y'\in F$. $\boxed{\forall(X,Y)\in F^2 :\quad X*Y'\in F}$

وبالتالي فإن : $(F,*)$ زمرة جزئية من $(E,*)$.

<u>التمرين 2 :</u>

$\boxed{I}$ p <u>عدد صحيح طبيعي أولي</u> و $p\geq 5$.

1) لدينا p أولي و $p\geq 5$ و 3 أولي إذن $3\wedge p=1$ (3 و p أوليان فيما بينهما) ومنه $3\wedge p^2=1$ و عليه فإن : $p\not\equiv 0[3]$.

ومنه نستنتج أن : $p\equiv 1[3]$ أو $p\equiv 2[3]$. ندرس هاتين الحالتين :

i . إذا كان $p\equiv 1[3]$, فإن : $p^2\equiv 1[3]$. ii . إذا كان $p\equiv 2[3]$, فإن: $p^2\equiv 4[3]$ إذن $p^2\equiv 1[3]$.

وبالتالي فإن : $\boxed{p^2\equiv 1[3]}$.

2) أ) لدينا p عدد صحيح طبيعي أولي و $p\geq 5$, إذن p عدد فردي ومنه $p=2q+1$ $\exists q\in\mathbb{Z}/$ ومنه

$p^2=(2q+1)^2=4q^2+4q+1=4q(q+1)+1$. إذن : $\boxed{p^2-1=4q(q+1)}$.

ب) لدينا q و $q+1$ عددان صحيحان طبيعيان متتابعان , إذن $q(q+1)$ عدد صحيح طبيعي زوجي.ومنه

$\exists k\in\mathbb{N}/\quad q(q+1)=2k$. إذن : $p^2-1=8k$.   ومنه نجد : $p^2\equiv 1[8]$.

3) خاصية : a و b و c أعداد نسبية . لدينا : $\begin{cases}a/c\\ b/c\\ a\wedge b=1\end{cases}\Rightarrow ab/c$

برهان : لدينا $a/c\Rightarrow\exists m\in\mathbb{Z}/c=am$ و $b/c\Rightarrow\exists n\in\mathbb{Z}/c=bn$ و $a\wedge b=1\overset{Bezout}{\Rightarrow}\exists(u,v)\in\mathbb{Z}^2/au+bv=1$.

إذن : $c=cau+cbv=bnau+ambv=ab(nu+mv)$ ومنه نستنتج أن : ab/c .

ملاحظة : الخاصية ليست صحيحة إذا كان $a\wedge b\neq 1$. مثال مضاد : 2يقسم 12 و 4 يقسم 12 لكن $2\times 4=8$ لا يقسم 12 ؛ $2\wedge 4=2$.

تطبيق : لدينا $p^2\equiv 1[3]$ و $p^2\equiv 1[8]$ إذن $3/\left(p^2-1\right)$ و $8/\left(p^2-1\right)$ و $3\wedge 8=1$ إذن $24=3\times 8/\left(p^2-1\right)$ أي $\boxed{p^2\equiv 1[24]}$

$\boxed{II}$ ليكن a عددا صحيحا طبيعيا حيث : $\boxed{a\wedge 24=1}$.

1) أ) لدينا $a\wedge 24=1$, إذن a عدد صحيح طبيعي فردي(لو كان a زوجيا لكان 2 قاسما مشتركا ل a و 24 وهذا يتناقض مع $a\wedge 24=1$)

ومنه نستنتج أن : $a^2\equiv 1[8]$ (اتبع نفس خطوات السؤالين I -2- أ و I -2- ب) .

ولدينا $a\wedge 24=1$, إذن $a\not\equiv 0[3]$ (لو كان $a\equiv 0[3]$ لكان 3 قاسما مشتركا ل a و 24 وهذا يتناقض مع $a\wedge 24=1$) .

إذن $a\equiv 1[3]$ أو $a\equiv 2[3]$. إذن $a\equiv 1[3]\Rightarrow a^2\equiv 1[3]$ و $a\equiv 2[3]\Rightarrow a^2\equiv 4[3]\Rightarrow a^2\equiv 1[3]$.

لدينا $a^2\equiv 1[8]$ و $a^2\equiv 1[3]$ و $3\wedge 8=1$ ؛ إذن : $\boxed{a^2\equiv 1[24]}$.

ب) نفترض أنه توجد أعداد صحيحة طبيعية a_1 و a_2 و ... و a_{23} حيث: $\forall k\in\{1,...,23\}:\quad a_k\wedge 24=1$

و $a_1^2+a_2^2+...+a_{23}^2=23997$.

لدينا $\forall k\in\{1,...,23\}:\quad a_k\wedge 24=1$. إذن $\forall k\in\{1,...,23\}:\quad a_k^2\equiv 1[24]$ ومنه فإن : $a_1^2+a_2^2+...+a_{23}^2\equiv 23[24]$

ولدينا $23997\equiv 21[24]$. إذن : $23\equiv 21[24]$ أي $2\equiv 0[24]$ وهذا تناقض ! .

خلاصة : لا توجد أعداد صحيحة طبيعية a_1 و a_2 و ... و a_{23} حيث: $\forall k\in\{1,...,23\}:\quad a_k\wedge 24=1$

و $a_1^2+a_2^2+...+a_{23}^2=23997$.

التمرين 3 :

$\boxed{I}$ نعتبر f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases}f(x)=(x+2)e^{-\frac{2}{x}}\quad ;\quad x>0\\ f(0)=0\end{cases}$.

وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة = 2cm) .

1) أ) نضع $X=-\dfrac{2}{x}$ إذن $x\to 0^+\Rightarrow X\to-\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)e^{-\frac{2}{x}}=\lim\limits_{X\to-\infty}\left(-\dfrac{2}{X}+2\right)e^X=0=f(0)$

لأن $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$. وبالتالي فإن f متصلة على اليمين في النقطة 0 .

ب) نضع $X=-\dfrac{2}{x}$ إذن $x\to 0^+\Rightarrow X\to-\infty$ ومنه :

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+2}{x}e^{-\frac{2}{x}}=\lim\limits_{X\to-\infty}(1-X)e^X=\lim\limits_{X\to-\infty}e^X-Xe^X=\boxed{0}$ لأن: $\lim\limits_{X\to-\infty}Xe^X=0$ و $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$

إذن f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 ولدينا $\boxed{f_d'(0)=0}$.

ج) ليكن $x\in]0,+\infty[$. لدينا:

$$f'(x)=\left((x+2)e^{-\frac{2}{x}}\right)'=(x+2)'e^{-\frac{2}{x}}+(x+2)\left(-\frac{2}{x}\right)'e^{-\frac{2}{x}}=\left(1+\frac{2}{x^2}(x+2)\right)e^{-\frac{2}{x}}=\frac{(x+1)^2+3}{x^2}e^{-\frac{2}{x}}>0$$

إذن f تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.

2) أ) نضع $X=-\dfrac{2}{x}$. إذن $x\to+\infty\Rightarrow X\to 0^-$ ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)e^{-\frac{2}{x}}=\lim\limits_{X\to 0^-}(-2+2X)\dfrac{e^X}{X}=\boxed{+\infty}$

ب) نضع : $u(t)=e^{-t}+t-1$ و $v(t)=\frac{t^2}{2}$ لكل $t\in[0,+\infty[$.

لدينا u و v قابلتين للإشتقاق مرتين على المجال $[0,+\infty[$ و u' و v' متصلتين على المجال $[0,+\infty[$ ولدينا :

$u'(t)=-e^{-t}+1$ و $u''(t)=e^{-t}$ و $v'(t)=t$ و $v''(t)=1$ لكل $t\in[0,+\infty[$.

بما أن لكل $t\in[0,+\infty[$: $t\geq 0\Rightarrow -t\leq 0\Rightarrow 0\leq e^{-t}\leq 1\Rightarrow 0\leq u''(t)\leq v''(t)$ ؛

فإن : $\forall x\geq 0: 0\leq \int_0^x u''(t)dt\leq \int_0^x v''(t)dt\Rightarrow 0\leq u'(x)\leq v'(x)$ لأن $u'(0)=v'(0)=0$.

ومنه فإن : $\forall t\geq 0: 0\leq \int_0^t u'(x)dx\leq \int_0^t v'(x)dx\Rightarrow 0\leq u(t)\leq v(t)$ لأن $u(0)=v(0)=0$.

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall t\in[0,+\infty[:\quad 0\leq e^{-t}+t-1\leq \frac{t^2}{2}}$.

ج) ليكن $x>0$. لدينا $\frac{2}{x}>0$ وبتطبيق السؤال السابق , نجد : $0\leq e^{-\frac{2}{x}}+\frac{2}{x}-1\leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2\Rightarrow 0\leq e^{-\frac{2}{x}}+\frac{2}{x}-1\leq \frac{2}{x^2}$

$$\Rightarrow 1-\frac{2}{x}\leq e^{-\frac{2}{x}}\leq 1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{2}{x}\right)(x+2)\leq (x+2)e^{-\frac{2}{x}}\leq \left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)(x+2)$$

$$\Rightarrow x+2-2-\frac{4}{x}\leq f(x)\leq x+2-2-\frac{4}{x}+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}$$

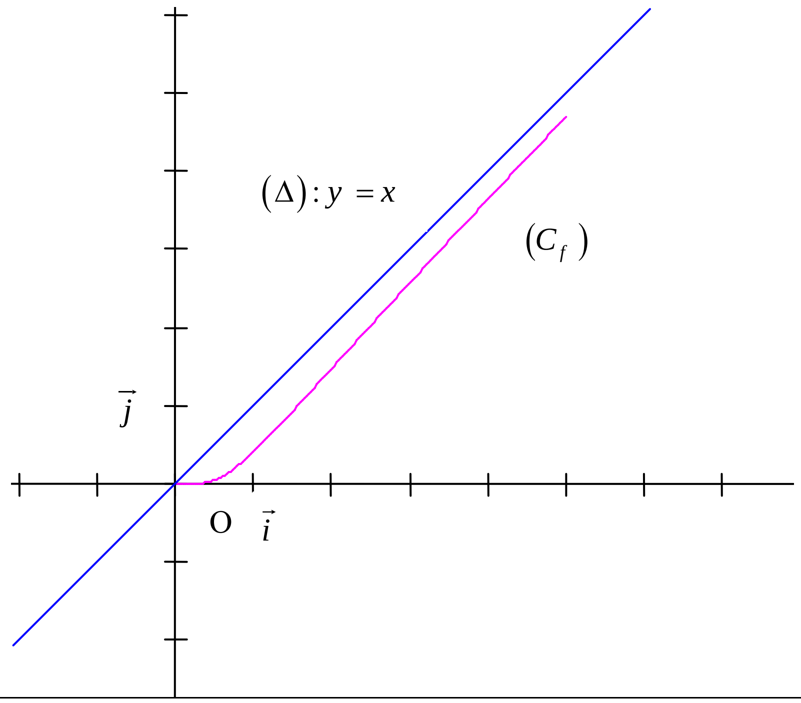
$$\Rightarrow x-\frac{4}{x}\leq f(x)\leq x+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{4}{x}\leq f(x)-x\leq \frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}}$$

د) لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ولدينا $\forall x>0: -\frac{4}{x}\leq f(x)-x\leq \frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}$ و $\lim_{x\to+\infty} -\frac{4}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}=0$.

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=0}$. ومنه نستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $\boxed{y=x}$.

3) إنشاء المنحنى (C_f) :



$\boxed{II}$ ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ و f_n الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :
$$\begin{cases} f_n(x) = \left(x + \dfrac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}} \quad ; \quad x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

1) نضع $X = -\dfrac{2}{x}$. إذن : $x \to 0^+ \Rightarrow X \to -\infty$ ومنه فإن :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{2}{nx}\right)e^{-\frac{2}{x}} = \lim_{X \to -\infty} \left(1 - \frac{X}{n}\right)e^{X} = \lim_{X \to -\infty} e^{X} - \frac{1}{n}Xe^{X} = \boxed{0}$$ لأن $\lim_{X \to -\infty} Xe^{X} = 0$.

إذن f_n قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 ولدينا : $\boxed{(f_n')_d(0) = 0}$.

2) ليكن $x > 0$. لدينا:
$$f_n'(x) = \left(\left(x + \frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}}\right)' = \left(x + \frac{2}{n}\right)' e^{-\frac{2}{x}} + \left(x + \frac{2}{n}\right)\left(-\frac{2}{x}\right)' e^{-\frac{2}{x}} = \left(1 + \left(x + \frac{2}{n}\right)\frac{2}{x^2}\right)e^{-\frac{2}{x}} > 0$$

إذن f_n دالة تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.

3) أ) لدينا f_n متصلة وتزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$ ؛ إذن f_n <u>تقابل</u> من المجال $]0,+\infty[$ نحو المجال $f_n(]0,+\infty[) =]0,+\infty[$.

وبما أن $\dfrac{2}{n} \in]0,+\infty[$ ؛ فإن $\exists! a_n \in]0,+\infty[\,/\, f_n(a_n) = \dfrac{2}{n}$.

ب) ليكن $x > 0$ و $n \in \mathbb{N}^*$. لدينا :
$$\left(f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1}\right) - \left(f_n(x) - \frac{2}{n}\right) = \left(\left(x + \frac{2}{n+1}\right)e^{-\frac{2}{x}} - \frac{2}{n+1}\right) - \left(\left(x + \frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}} - \frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n}\right)\left(e^{-\frac{2}{x}} - 1\right)$$

إذن :
$$\left(f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1}\right) - \left(f_n(x) - \frac{2}{n}\right) = \boxed{-\frac{2}{n(n+1)}\left(e^{-\frac{2}{x}} - 1\right)}$$

ومنه فإن : $x > 0 \Rightarrow -\dfrac{2}{x} < 0 \Rightarrow e^{-\frac{2}{x}} < 1 \Rightarrow -\dfrac{2}{n(n+1)}\left(e^{-\frac{2}{x}} - 1\right) > 0$.

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x > 0; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*; \quad f_{n+1}(x) - \dfrac{2}{n+1} > f_n(x) - \dfrac{2}{n}}$.

ج) لدينا :
$$f_{n+1}(a_{n+1}) - \frac{2}{n+1} > f_n(a_{n+1}) - \frac{2}{n} \Rightarrow 0 > f_n(a_{n+1}) - \frac{2}{n}$$ (لأن $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$)
$$\Rightarrow f_n(a_{n+1}) < \frac{2}{n}$$
$$\Rightarrow a_{n+1} < f_n^{-1}\left(\frac{2}{n}\right)$$ (لأن f_n تقابل من $[0,+\infty[$ نحو $[0,+\infty[$)
$$\Rightarrow \boxed{a_{n+1} < a_n}$$ (لأن $f_n(a_n) = \dfrac{2}{n}$)

وبالتالي فإن $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية تناقصية ؛ وبما أنها مصغورة بالعدد 0 ($\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad a_n > 0}$) ؛ فإنها متقاربة. نضع $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$

د) لدينا :
$$f_n(a_n) = \frac{2}{n} \Rightarrow \left(a_n + \frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{a_n}} = \frac{2}{n} \Rightarrow a_n + \frac{2}{n} = \frac{2}{n}e^{\frac{2}{n}} \Rightarrow na_n + 2 = 2e^{\frac{2}{n}} \Rightarrow \boxed{na_n = 2e^{\frac{2}{n}} - 2}$$.

هـ) لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad a_n > 0$. إذن $a = \lim_{n \to +\infty} a_n \geq 0$. نفترض أن $a \neq 0$ ؛ إذن : <u>$a > 0$</u> .

ولدينا : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2$ و $\lim_{n \to +\infty} na_n = +\infty$ لكن $\lim_{n \to +\infty} 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2 = 2e^{\frac{2}{a}} - 2$. وهذا تناقض . وبالتالي فإن :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = 0}$$

$\boxed{III}$ نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بمايلي : $\forall x \in [0,+\infty[: \quad F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$.

1) أ) ليكن $x > 0$. لدينا f تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$ و $x \leq 2x$. إذن :

$\forall t\in[x,2x]:\quad x\le t\le 2x \Rightarrow f(x)\le f(t)\le f(2x)$. إذن : $f(x)\int_x^{2x}dt\le\int_x^{2x}f(t)dt\le f(2x)\int_x^{2x}dt$.

ومنه فإن : $\boxed{xf(x)\le F(x)\le xf(2x)}$ لكل $x>0$.

ب) لدينا $\forall x>0:\quad F(x)\ge xf(x)$ ولدينا $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}xf(x)=+\infty$. ومنه نستنتج أن : $\lim_{x\to+\infty}F(x)=\boxed{+\infty}$

2) أ) لدينا f متصلة على المجال $[0,+\infty[$. لتكن ψ دالة أصلية للدالة f على المجال $[0,+\infty[$. إذن :

$\forall x\in[0,+\infty[:\quad F(x)=\int_x^{2x}f(t)dt=\psi(2x)-\psi(x)$.

بما أن $x\mapsto 2x$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ وتحول المجال $]0,+\infty[$ نحو المجال $]0,+\infty[$ وبما أن ψ قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ؛ فإن $x\mapsto\psi(2x)$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$. وبالتالي فإن F قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

ولدينا : $\left[\forall x>0:\quad xf(x)\le F(x)\le xf(2x)\right]\Rightarrow\left[\forall x>0:\quad f(x)\le\frac{F(x)}{x}\le f(2x)\right]$ و $\lim_{x\to0^+}f(x)=0$ و

$\lim_{x\to0^+}f(2x)=0$ فإن : $\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)}{x}=0$ إذن F قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 و $\boxed{F'_d(0)=0}$.

وبالتالي فإن F قابلة للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$.

ب) حسب (أ) نعلم أن $F'_d(0)=0$. ليكن $x>0$. لدينا :

$$F'(x)=\left(\psi(2x)-\psi(x)\right)'=(2x)'\psi'(2x)-\psi'(x)=2f(2x)-f(x)=2(2x+2)e^{-\frac{1}{x}}-(x+2)e^{-\frac{2}{x}}$$

$$F'(x)=e^{-\frac{2}{x}}\left[4(x+1)e^{\frac{1}{x}}-(x+2)\right]=e^{-\frac{2}{x}}\left[(x+2)\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-(x+2)e^{\frac{1}{x}}+4(x+1)e^{\frac{1}{x}}\right]$$

ومنه فإن : $\boxed{F'(x)=e^{-\frac{2}{x}}\left[(x+2)\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)+(3x+2)e^{\frac{1}{x}}\right]}$.

وبالتالي فإن :

$$\begin{cases}F'(x)=e^{-\frac{2}{x}}\left[(x+2)\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)+(3x+2)e^{\frac{1}{x}}\right] & ;\quad x>0\\ F'_d(0)=0\end{cases}$$

3) لدينا : $x>0\Rightarrow\frac{1}{x}>0\Rightarrow e^{\frac{1}{x}}>1\Rightarrow e^{\frac{1}{x}}-1>0$ و $(3x+2)e^{\frac{1}{x}}>0$ و $x>0\Rightarrow x+2>0$.

إذن : $\forall x>0:\quad F'(x)>0$ ومنه فإن : F تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة F على المجال $[0,+\infty[$:

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$F'(x)$	0 $\qquad\qquad$ $+$
$F(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

التمرين 4 :

$$\forall z\in\mathbb{C}-\{-1\}:\quad f(z)=\frac{iz-1}{(z+1)^2}$$

1) أ) ليكن y عددا حقيقيا . لدينا :

$$\begin{aligned}f(iy)=iy\quad&\Leftrightarrow\quad\frac{-y-1}{(iy+1)^2}=iy\\&\Leftrightarrow\quad -y-1=iy(-y^2+1+2iy)\\&\Leftrightarrow\quad -y-1=-2y^2+iy(-y^2+1)\\&\Leftrightarrow\quad\begin{cases}-y-1=-2y^2\\ y(1-y)(1+y)=0\end{cases}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2y^2 - y - 1 = 0 \\ (y=0) \vee (y=1) \vee (y=-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 1$$

ب) لدينا :

$$f(z) = z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{iz-1}{(z+1)^2} = z$$

$$\Leftrightarrow \quad iz - 1 = z(z^2 + 2z + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad iz - 1 = z^3 + 2z^2 + z$$

$$\Leftrightarrow \quad z^3 + 2z^2 + (1-i)z + 1 = 0 : (*)$$

نعلم أن $f(i) = i$ إذن i حل للمعادلة $(*)$. ننجز القسمة الأقليدية ل $z^3 + 2z^2 + (1-i)z + 1$ على $z - i$ كمايلي :

$$\begin{array}{rl|l} & z^3 + 2z^2 + (1-i)z + 1 & z - i \\ \hline \odot & \cancel{z^3 - iz^2} & z^2 + (2+i)z + i \\ & (2+i)z^2 + (1-i)z + 1 & \\ \odot & (2+i)z^2 + (1-2i)z & \\ & iz + 1 & \\ & iz + 1 & \\ & 00 & \end{array}$$

إذن :

$$f(z) = z \quad \Leftrightarrow \quad (z-i)\left(z^2 + (2+i)z + i\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z = i \quad \vee \quad z^2 + (2+i)z + i = 0 : (**)$$

نحل المعادلة $(**)$: لدينا $\Delta = (2+i)^2 - 4i = 7 - 1 + 4i - 4i = 3 = \sqrt{3}^2$. إذن للمعادلة $(**)$ حلين هما :

$$z = \frac{-(2+i) - \sqrt{3}}{2} = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{أو} \quad z = \frac{-(2+i) + \sqrt{3}}{2} = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة $f(z) = z$ في $\mathbb{C}$ هي : $S = \left\{ i, -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right\}$.

بما أن $\Re e(z_0) = 0$, فإن $\boxed{z_0 = i}$. وبماأن $\Re e(z_1) > \Re e(z_2)$ فإن $\boxed{z_1 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$ و $\boxed{z_2 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$.

2) أ) لدينا :

$$z_1 + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left[1, -\frac{\pi}{6}\right] = \left[1, -\frac{\pi}{6} + 2\pi\right] = \left[1, \frac{11\pi}{6}\right] = \boxed{e^{i\frac{11\pi}{6}}}$$

و

$$z_2 + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\left[1, \frac{\pi}{6}\right] = \left[1, \frac{\pi}{6} + \pi\right] = \left[1, \frac{7\pi}{6}\right] = \boxed{e^{i\frac{7\pi}{6}}} .$$

ب) لدينا :

$$z_1 = -1 + e^{i\frac{11\pi}{6}} = e^{i\frac{11\pi}{12}}\left(-e^{-i\frac{11\pi}{12}} + e^{i\frac{11\pi}{12}}\right) = 2i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)e^{i\frac{11\pi}{12}} = 2\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{11\pi}{12}} = 2\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)e^{i\frac{17\pi}{12}}$$

و

$$z_2 = -1 + e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{i\frac{7\pi}{12}}\left(-e^{-i\frac{7\pi}{12}} + e^{i\frac{7\pi}{12}}\right) = 2i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)e^{i\frac{7\pi}{12}} = 2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{7\pi}{12}} = 2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)e^{i\frac{13\pi}{12}}$$

لأن : $\boxed{e^{i\frac{\pi}{2}} = i}$. ولدينا :

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

ومنه نجد : $z_1 = 2\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{17\pi}{12}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}}$ و $z_2 = 2\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{13\pi}{12}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}}$.

3) نضع $z = e^{i\alpha}$ حيث : $0 \le \alpha < \pi$.

أ) لدينا : $\boxed{\overline{z} = \frac{1}{z}} \Leftarrow z\overline{z} = 1 \Leftarrow |z| = 1$. إذن : $\overline{f(z)} = \overline{\left(\frac{iz-1}{(z+1)^2}\right)} = \frac{-i\overline{z}-1}{(\overline{z}+1)^2} = \frac{-iz^2\overline{z}-z^2}{\left(z\overline{z}+z\right)^2} = \frac{-iz-z^2}{\left(1+z\right)^2} = -z\,\frac{i+z}{\left(1+z\right)^2}$

ومنه : $\boxed{\overline{f(z)} = iz\,\frac{iz-1}{\left(1+z\right)^2} = izf(z)}$.

ب) لدينا: $f(z)+\overline{f(z)} = 0 \Leftrightarrow izf(z)+f(z) = 0 \Leftrightarrow (iz+1)f(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} iz+1=0 \\ f(z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = i \\ \dfrac{iz-1}{(z+1)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = i \\ z = -i \end{cases}$

إذن : $f(z)+\overline{f(z)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{i\alpha} = i \\ e^{i\alpha} = -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \\ \alpha \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}}$ (لأن $0 \le \alpha < \pi$)

ج) لدينا:
$$f(z) = f(e^{i\alpha}) = \frac{ie^{i\alpha}-1}{\left(e^{i\alpha}+1\right)^2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\alpha}-1}{\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}+e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)\right)^2} = \frac{e^{\frac{1}{2}i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\left(e^{\frac{1}{2}i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}-e^{-\frac{1}{2}i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\right)}{e^{i\alpha}\left(2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2}$$
$$f(z) = e^{\frac{1}{2}i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-i\alpha}\,\frac{2i\sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)}{4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}e^{\frac{1}{2}i\left(\frac{\pi}{2}+\pi-\alpha\right)} = \boxed{\frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}e^{i\frac{3\pi-2\alpha}{4}}}$$

وذلك لأن: $0 \le \alpha < \pi \Rightarrow 0 \le \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \le \frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) > 0$ و

$$0 \le \alpha < \pi \Rightarrow 0 \le \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$$

4) لدينا : $\begin{cases} |z| = 1 \\ \Re e(f(z)) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = e^{i\alpha} / 0 \le \alpha < 2\pi \\ \Re e(f(z)) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$. ولدينا :

$$\Re e(f(z)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\cos\left(\frac{3\pi-2\alpha}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi-2\alpha}{4}\right) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$\Re e(f(z)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$\Re e(f(z)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\cos(\alpha) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Re e(f(z))=\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1\right)=\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\frac{1}{2}\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\alpha}{2}\equiv\pm\frac{\pi}{3}[2\pi]\\ \frac{\alpha}{2}\equiv\pm\frac{2\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$$

$$\Re e(f(z))=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha\equiv\pm\frac{2\pi}{3}[4\pi]\\ \alpha\equiv\pm\frac{4\pi}{3}[4\pi]\end{cases}$$

ولدينا : $\alpha\equiv\frac{2\pi}{3}[4\pi]\Rightarrow z=e^{i\alpha}=e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=j$ و $\alpha\equiv-\frac{2\pi}{3}[4\pi]\Rightarrow z=e^{i\alpha}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\overline{j}$

و $\alpha\equiv\frac{4\pi}{3}[4\pi]\Rightarrow z=e^{i\alpha}=e^{i\frac{4\pi}{3}}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}=\overline{j}$ و $\alpha\equiv-\frac{4\pi}{3}[4\pi]\Rightarrow z=e^{i\alpha}=e^{-i\frac{4\pi}{3}}=e^{i\frac{2\pi}{3}}=j$

وبالتالي فإن : $z=j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ أو $z=\overline{j}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. $\boxed{S=\{j,\overline{j}\}}$

__طريقة أخرى__: لنحل النظمة التالية : $\begin{cases}|z|=1\\ \Re e(f(z))=\frac{1}{2}\end{cases}$.

لدينا $|z|=1$. إذن حسب السؤال 3- أ - لدينا : $\overline{f(z)}=izf(z)$ ومنه نستنتج أن :

$$\begin{aligned}\Re e(f(z))=\frac{1}{2} &\Leftrightarrow f(z)+\overline{f(z)}=2\Re e(f(z))=1\\ &\Leftrightarrow f(z)+izf(z)=1\\ &\Leftrightarrow (iz+1)f(z)=1\\ &\Leftrightarrow (iz+1)\frac{iz-1}{(z+1)^2}=1\\ &\Leftrightarrow (iz-1)(iz+1)=(z+1)^2\\ &\Leftrightarrow -z^2-1=z^2+2z+1\\ &\Leftrightarrow 2z^2+2z+2=0\\ &\Leftrightarrow z^2+z+1=0\\ &\Leftrightarrow \left(z=e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\vee\left(z=e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)\\ &\Leftrightarrow \left[z=j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\vee\left[z=j^2=\overline{j}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\end{aligned}$$

وبالتالي فإن : $\boxed{S=\{j,\overline{j}\}}$.

__طريقة أخرى لإنجاز السؤال I – 1 من التمرين الثاني :__

نضع $m=p\left(p^2-1\right)$.لدينا: $m=p(p-1)(p+1)$. إذن m هو جداء ثلاثة أعداد متتابعة ؛ إذن : $3/m$ ومنه $3/p\left(p^2-1\right)$

وبما أن p أولي و $p\geq 5$ فإن $p>3$ و 3 لا يقسم p . إذن : $p\wedge 3=1$.

وعليه فإن : $\begin{cases}3/p\left(p^2-1\right)\\ p\wedge 3=1\end{cases}\overset{Gauss}{\Longrightarrow}3/\left(p^2-1\right)$. وهذا يعني أن : $\boxed{p^2\equiv 1[3]}$.

__طريقة أخرى لإنجاز السؤال II – 1 من التمرين الثاني :__

لدينا $a\wedge 24=1$ و $a\in\mathbb{N}$.

لنفكك a إلى جداء عوامل أولية : $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$ حيث p_1 و p_2 و ... و p_r أعداد صحيحة طبيعية أولية و α_1 و α_2 و ... و α_r

أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة .

نعلم أن القواسم الأولية للعدد 24 هي 2 و 3 ($24 = 2^3 \times 3$) . وبما أن $a \wedge 24 = 1$ فإن 2 و 3 لا يقسمان a . أي 2 و 3 لا يوجدان في تفكيك a . ومنه فإن الأعداد p_1 و p_2 و ... و p_r أعداد أولية أكبر قطعا من 3 . أي أكبر من أو يساوي 5 . وحسب $\mathrm{I}-1$, لدينا :

$\forall i \in \{1,2,...,r\} \quad : \quad p_i \equiv 1[3]$ ومنه فإن :

$$a^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r} = \left(p_1^2\right)^{\alpha_1}\left(p_2^2\right)^{\alpha_2}...\left(p_r^2\right)^{\alpha_r} \Rightarrow a^2 \equiv 1^{\alpha_1} \times 1^{\alpha_2} \times ... \times 1^{\alpha_r}\,[3]$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2 \equiv 1[3]}$$

<u>نتيجة</u> : العدد العقدي j يسمى عدد جاكوبي (Nombre de Jacobi) ويحقق ما يلي :

$$\boxed{1 + j + j^2 = 0} \quad و \quad \boxed{j^3 = 1} \quad و \quad \boxed{j^2 = \bar{j}} \quad و \quad \boxed{j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]} \quad \boxed{j^4 = j}$$

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} : \quad \exists!(a,b) \in \mathbb{R}^2 / \quad z = a + bj}$$

الأعداد العقدية 1 و j و $\bar{j}$ هي الجذور الثالثة للوحدة وصورها في المستوى العقدي هي رؤوس مثلث متساوي الأضلاع .

*** انتهى ***

<u>تمرين</u> :

لتكن a و b و c أعدادا من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $ab = c^2$ و $a \wedge b = 1$.

بين أن : $\exists (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / \quad a = m^2$ و $b = n^2$ ؟

<u>الجواب</u> :

نضع $d = a \wedge c$. إذن : $m \wedge n = 1$ و $c = dn$ و $a = dm$ / $\exists (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

لدينا : $\boxed{bm = dn^2} \Leftrightarrow bdm = d^2n^2 \Leftrightarrow ab = c^2$. ولدينا : $m \wedge n = 1 \Leftrightarrow m \wedge n^2 = 1$.

بما أن : $bm = dn^2$ فإن : $\begin{cases} n^2 / bm \\ m \wedge n^2 = 1 \end{cases} \overset{Gauss}{\Rightarrow} \boxed{n^2 / b} : (i)$.

يكفي أن نبين أن : b / n^2 ؟

لدينا : $bm = n^2 d$ إذن : $b / n^2 d$. لهذا يكفي أن نبين أن : $b \wedge d = 1$ ؟

نضع $\delta = b \wedge d$. لدينا : $\begin{cases} \delta / b \\ \delta / d \end{cases}$ و إذن : $\begin{cases} \delta / b \\ \delta / dm = a \end{cases}$ و ومنه فإن : $\delta / a \wedge b$. وبما أن $a \wedge b = 1$ فإن : $\delta / 1$ إذن

$\delta = 1$. ومنه فإن: $\boxed{b \wedge d = 1}$. وعليه فإن : $\begin{cases} b / dn^2 \\ b \wedge d = 1 \end{cases} \overset{Gauss}{\Rightarrow} \boxed{b / n^2} : (ii)$.

من (i) و (ii) , نستنتج أن : $\boxed{b = n^2}$.

ولدينا : $\boxed{m = d} \Leftarrow n^2 m = dn^2 \Leftarrow bm = dn^2$. وبما أن : $a = dm$ فإن : $\boxed{a = m^2}$

<u>خلاصة</u> : $\boxed{\exists (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / \quad a = dm \quad و \quad c = dn \quad و \quad m \wedge n = 1}$

<u>مبرهنة Wilson</u> :

ليكن p عدد صحيحا طبيعيا . لدينا :

p أولي $\Leftrightarrow (p-1)! + 1 \equiv 0[p]$

<u>مبرهنة Fermat</u> :

أ) ليكن p عددا أوليا موجبا وليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم بحيث :

$n \wedge p = 1$. لدينا : $\boxed{n^{p-1} \equiv 1[p]}$.

ب) لكل عدد أولي موجب p ولكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم a , لدينا :

$\boxed{a^p \equiv a[p]}$

الأستاذ : الحيان	تصحيح الإمتحان الوطني الموحد الدورة الإستدراكية 8 / يوليوز / 2005	الثانية بكالوريا علوم رياضية

التمرين 1 :

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية : $(E):\ \boxed{(x+1)^2=9+5y}$.

أ) ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) . لدينا:

$$\begin{aligned}
(x+1)^2=9+5y \quad &\Rightarrow \quad (x+1)^2\equiv 4\quad [5]\\
&\Rightarrow \quad (x+1)^2-4\equiv 0\quad [5]\\
&\Rightarrow \quad (x+1)^2-4\equiv 0\quad [5]\\
&\Rightarrow \quad (x+1-2)(x+1+2)\equiv 0\quad [5]\\
&\Rightarrow \quad (x-1)(x+3)\equiv 0\quad [5]\\
&\Rightarrow \quad 5/(x-1)\ \text{أو}\ 5/(x+3)\\
&\Rightarrow \quad x\equiv 1\quad [5]\ \text{أو}\ x\equiv -3\quad [5]\\
&\Rightarrow \quad \boxed{x\equiv 1\quad [5]}\ \text{أو}\ \boxed{x\equiv 2\quad [5]}
\end{aligned}$$

ب) لنحل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) :

نعلم أنه إذا كان (x,y) حلا للمعادلة (E) , فإن : $x\equiv 1\quad [5]$ أو $x\equiv 2\quad [5]$. إذن :

$$\begin{aligned}
x\equiv 1\quad [5] \quad &\Rightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z}: \quad x=1+5k\\
&\Rightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z}: \quad (2+5k)^2=9+5y \quad ;(x+1=2+5k)\\
&\Rightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z}: \quad 4+20k+25k^2=9+5y\\
&\Rightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z}: \quad 5y=-5+20k+25k^2\\
&\Rightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z}: \quad \boxed{y=-1+4k+5k^2}
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
x\equiv 2\quad [5] \quad &\Rightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z}: \quad x=2+5k\\
&\Rightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z}: \quad (3+5k)^2=9+5y \quad ;(x+1=3+5k)\\
&\Rightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z}: \quad 9+30k+25k^2=9+5y\\
&\Rightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z}: \quad 5y=30k+25k^2\\
&\Rightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z}: \quad \boxed{y=6k+5k^2}
\end{aligned}$$

وبما أن الأزواج $(1+5k,-1+4k+5k^2)$ و $(2+5k,6k+5k^2)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$, فإن مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$\boxed{S=\{(1+5k,-1+4k+5k^2);(2+5k,6k+5k^2)/k\in\mathbb{Z}\}}$$

2) ليكن $k\in\mathbb{Z}$, لدينا :

$$\begin{array}{rr|l}
 & 5k^2+4k-1 & 5k+1\\
 & 5k^2+k & \\ \cline{3-3}
 & & k\\
\cline{2-2}
 & 3k-1 &
\end{array}$$

£ إذن : $5k^2+4k-1=k(5k+1)+(3k-1)$.

ومنه فإن :

$$\begin{aligned}
(5k^2+4k-1)\wedge(5k+1) &= ((5k^2+4k-1)-k(5k+1))\wedge(5k+1)\\
&= (3k-1)\wedge(5k+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (3k-1)\wedge\big((5k+1)-(3k-1)\big)\\
&= (3k-1)\wedge(2k+2)\\
&= \big((3k-1)-(2k+2)\big)\wedge(2k+2)\\
&= (k-3)\wedge(2k+2)\\
&= (k-3)\wedge\big((2k+2)-2(k-3)\big)\\
(5k^2+k-1)\wedge(5k+1) &= (k-3)\wedge 8
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{Z}:\quad (5k^2+4k-1)\wedge(5k+1)=(k-3)\wedge 8}$$

3) لنحل في $\mathbb{N}^2$ النظمة التالية :

$$(*):\begin{cases}\overline{121}^{(x)} = \overline{59}^{(y)}\\ x\wedge y = 8\\ x\equiv 1\quad [5]\end{cases}$$

لدينا :

$$(*)\iff \begin{cases} x^2+2x+1 = 5y+9\\ x\wedge y = 8\\ x\equiv 1\quad [5]\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x+1)^2 = 9+5y\\ x\wedge y = 8\\ x\equiv 1\quad [5]\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x,y)=(1+5k,-1+4k+5k^2)\quad ou\quad (x,y)=(2+5k,6k+5k^2)/k\in\mathbb{Z}\\ x\wedge y = 8\\ x\equiv 1\quad [5]\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x,y)= (1+5k,-1+4k+5k^2)\quad /k\in\mathbb{Z}\\ (1+5k)\wedge(-1+4k+5k^2)= 8\\ x\equiv 1\quad [5]\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x,y)= (1+5k,-1+4k+5k^2)\quad /k\in\mathbb{Z}\\ (k-3)\wedge 8= 8\\ x\equiv 1\quad [5]\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x,y)= (1+5k,-1+4k+5k^2)\quad /k\in\mathbb{Z}\\ 8/(k-3)\\ x\equiv 1\quad [5]\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x,y)= (1+5k,-1+4k+5k^2)\quad /k\in\mathbb{Z}\\ \exists h\in\mathbb{Z}/\quad k=3+8h\end{cases}$$

وبما أن : $x\in\mathbb{N}\Rightarrow x\geq 0\Rightarrow 1+5k\geq 0\Rightarrow k\geq -\frac{1}{5}\Rightarrow k\geq 0\Rightarrow 3+8h\geq 0\Rightarrow h\geq -\frac{3}{8}\Rightarrow h\geq 0\Rightarrow h\in\mathbb{N}$

فإن :

$$(*)\iff (x,y)=\big(1+5(3+8h),-1+4(3+8h)+5(3+8h)^2\big)\quad /h\in\mathbb{N}$$

$$(*)\iff (x,y)=\big(16+40h,56+272h+320h^2\big)\quad /h\in\mathbb{N}$$

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة $(*)$ في $\mathbb{Z}^2$ هي : $\boxed{S=\left\{\left(16+40h,56+272h+320h^2\right)/h\in\mathbb{Z}\right\}}$

التمرين 2:

$$(C_m):\frac{x^2}{10-m}+\frac{y^2}{2-m}=1 \quad ; \quad m\in\mathbb{R}-\{2,10\}$$

I – 1) لدينا : $2-m>0\Leftrightarrow m<2$ و $10-m>0\Leftrightarrow m<10$.

إذا كان $\boxed{m<2}$, فإن : $2-m>0$. إذن : $(C_m):\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{10-m}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{2-m}\right)^2}=1$ ومنه فإن (C_m) إهليليج .

إذاكان $\boxed{2<m<10}$, فإن : $2-m<0$ و $10-m>0$: إذن : $(C_m):\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{10-m}\right)^2}-\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{m-2}\right)^2}=1$

ومنه فإن (C_m) هذلول .

إذاكان $\boxed{m>10}$, فإن : $10-m<0$ و $2-m<0$ إذن : $1=\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{10-m}\right)^2}-\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{m-2}\right)^2}<0$ (لا يمكن)

ومنه فإن : $(C_m)=\varnothing$.

2) إذا كان $\boxed{m<2}$ فإن : $(C_m):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ حيث : $a=\sqrt{10-m}$ و $b=\sqrt{2-m}$ ($a>b$)

إذن (C_m) إهليليج : مركزه $O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ؛ رؤوسه $A\begin{pmatrix}\sqrt{10-m}\\0\end{pmatrix}$ و $A'\begin{pmatrix}-\sqrt{10-m}\\0\end{pmatrix}$ و $B\begin{pmatrix}0\\\sqrt{2-m}\end{pmatrix}$ و $B'\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{2-m}\end{pmatrix}$

ولدينا $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{(10-m)-(2-m)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ؛ ومنه فإن بؤرتي (C_m) هما $F\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ و $F'\begin{pmatrix}-2\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$.

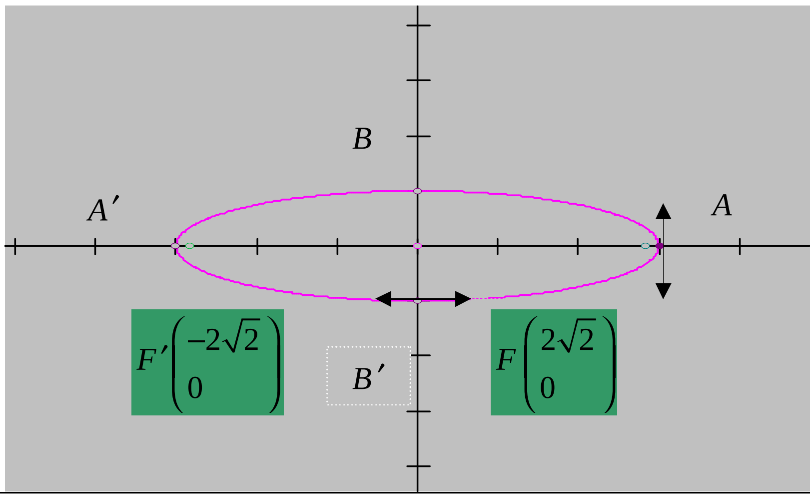
إذاكان $\boxed{2<m<10}$, فإن : $(C_m):\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ حيث : $a=\sqrt{10-m}$ و $b=\sqrt{m-2}$.

إذن (C_m) هذلول : مركزه $O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ؛ رأسيه $A\begin{pmatrix}\sqrt{10-m}\\0\end{pmatrix}$ و $A'\begin{pmatrix}-\sqrt{10-m}\\0\end{pmatrix}$ ولدينا :

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(m-2)+(10-m)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, إذن بؤرتي (C_m) هما $F\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ و $F'\begin{pmatrix}-2\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ ومقاربيه :

$(D):y=\dfrac{b}{a}x\Leftrightarrow\boxed{y=\sqrt{\dfrac{m-2}{10-m}}x}$ و $(D)':y=-\dfrac{b}{a}x\Leftrightarrow\boxed{y=-\sqrt{\dfrac{m-2}{10-m}}x}$.

3) إنشاء الإهليليج (C_1) من أجل $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$:



II - نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):\ z^2-(6\cos(\alpha))z+1+8\cos^2(\alpha)$ حيث : $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

1) المميز المختصر للمعادلة (E) هو :

$$\Delta' = (-3\cos(\alpha))^2-\left(1+8\cos^2(\alpha)\right)=9\cos^2(\alpha)-1-8\cos^2(\alpha)=\cos^2(\alpha)-1=-\sin^2(\alpha)=\boxed{(i\sin(\alpha))^2}$$

إذن حلى المعادلة (E) هما : $z=3\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$ أو $z=3\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)$.

وبما أن : $\left[\cos(\alpha)>0\ \text{و}\ \sin(\alpha)>0\right] \Rightarrow \alpha\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ فإن : $\operatorname{Im}(z_1)>0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} z_1=3\cos(\alpha)+i\sin(\alpha) \\ z_2=3\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)\end{array}}$

وبالتالي فإن : $S=\{3\cos(\alpha)+i\sin(\alpha),3\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)\}$

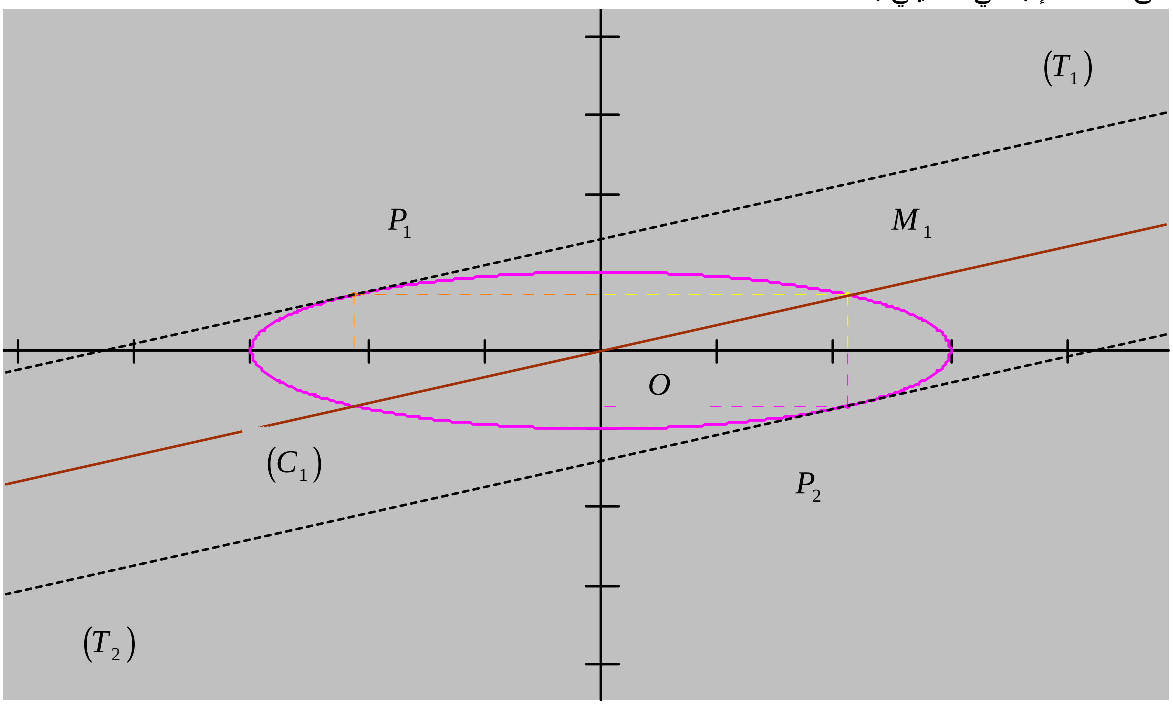
2) أ) لنبين أن $M_1(z_1=3\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))\in(C_1)$.

لدينا : $x=\Re e(z_1)=3\cos(\alpha)$ و $y=\Im m(z_1)=\sin(\alpha)$. إذن :

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{1^2}=\frac{(3\cos(\alpha))^2}{9}+\frac{(\sin(\alpha))^2}{1}=\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$$

ومنه نستنتج أن : $\boxed{M_1\in(C_1)}$.

ب) ننشئ الشكل الإجمالي كما يلي :



* الشكل من أجل $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ *

لتكن $P\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ نقطة من الإهليليج (C_1) حيث $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. معادلة المماس (T) للمنحنى (C_1) في النقطة P هي :

$\boxed{xx_0+9yy_0=9} \Leftrightarrow \dfrac{xx_0}{9}+\dfrac{yy_0}{1}=1$. إذن $\vec{u}\begin{pmatrix}-9y_0\\x_0\end{pmatrix}$ متجهة موجهة للمماس (T) ولدينا : $\overrightarrow{OM_1}\begin{pmatrix}3\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix}$. إذن :

$$\begin{aligned}
(OM_1)\perp(T) &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM_1}\ \text{و}\ \vec{u}\ \text{متجهتان مستقيميتان}\\
&\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{OM_1},\vec{u}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix}3\cos(\alpha) & -9y_0\\ \sin(\alpha) & x_0\end{vmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow 3\cos(\alpha)x_0+9\sin(\alpha)y_0=0\\
&\Leftrightarrow \cos(\alpha)x_0+3\sin(\alpha)y_0=0\\
&\Leftrightarrow \cos(\alpha)x_0=-3y_0\sin(\alpha)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x_0 = -3y_0 \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$

ولدينا :

$$P\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in (C_1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_0^2}{3^2} + \frac{y_0^2}{1^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0^2 + 9y_0^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \quad 9y_0^2 \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} + 9y_0^2 = 9 \quad ; x_0 = -3y_0 \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2(\alpha) y_0^2 + \cos^2(\alpha) y_0^2 = \cos^2(\alpha) \quad ; x_0 = -3y_0 \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_0^2 = \cos^2(\alpha) \quad ; x_0 = -3y_0 \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_0 = \pm\cos(\alpha) \quad ; x_0 = -3y_0 \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \mp 3\sin(\alpha)$$

نحصل إذن على نقطتين : $\boxed{P_1\begin{pmatrix} -3\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}}$ و $\boxed{P_2\begin{pmatrix} 3\sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}}$

وبالتالي فإنه توجد نقطتان $P_1\begin{pmatrix} -3\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ و $P_2\begin{pmatrix} 3\sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ من (C_1) حيث يكون فيهما المماسان (T_1) و (T_2) للمنحنى (C_1) على التوالي , موازيان للمستقيم (OM_1) ؛ حيث: $(T_1) : -3\sin(\alpha)x + 9\cos(\alpha)y - 9 = 0$

و $(T_2) : 3\sin(\alpha)x - 9\cos(\alpha)y - 9 = 0$

إذن: $\boxed{P_1 \in (C_1)}$ و $\boxed{P_2 \in (C_1)}$ و $\boxed{\begin{matrix} P_1\begin{pmatrix} -3\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}; & (T_1) : -\sin(\alpha)x + 3\cos(\alpha)y - 3 = 0 \\ P_2\begin{pmatrix} 3\sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}; & (T_2) : \sin(\alpha)x - 3\cos(\alpha)y - 3 = 0 \end{matrix}}$ و $\boxed{(T_1) \parallel (T_2) \parallel (OM_1)}$

أنظر الشكل الإجمالي السابق .

ج) لدينا : $OM_1\left(3\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\right)$ و $OM_2\left(3\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)\right)$

و $OP_1\left(-3\sin(\alpha) + i\cos(\alpha)\right)$ و $OP_2\left(3\sin(\alpha) - i\cos(\alpha)\right)$

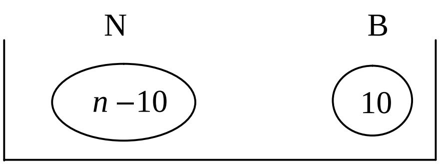
إذن : $OM_1^2 + OP_1^2 = 9\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) + 9\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 10\left(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)\right) = 10$

و : $OM_2^2 + OP_2^2 = 9\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) + 9\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 10\left(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)\right) = 10$

وبالتالي فإن : $\boxed{OM_1^2 + OP_1^2 = OM_2^2 + OP_2^2}$

التمرين 3:

ليكن $n \in \mathbb{N}$ بحيث : $n \geq 20$.



نسحب كرة من الكيس ونسجل لونها ؛ ثم نعيدها إلى الكيس . نكرر هذه التجربة n مرة . ولكل $0 \leq k \leq n$, نضع :
$p_k =$ إحتمال الحصول على k كرة بيضاء .

1) الأمر يتعلق بالإختبارات المتكررة . إذن : $p_k = C_n^k \left(\frac{C_{10}^1}{C_n^1}\right)^k \left(1-\frac{C_{10}^1}{C_n^1}\right)^{n-k} = C_n^k \left(\frac{10}{n}\right)^k \left(1-\frac{10}{n}\right)^{n-k}$ ومنه فإن :

$$\boxed{p_k = C_n^k \left(\frac{10}{n}\right)^k \left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-k}}$$

2) نضع : $\boxed{u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k}}$: $\forall k \in \{0,1,...,n-1\}$.

أ) لدينا :

$$u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{C_n^{k+1}\left(\frac{10}{n}\right)^{k+1}\left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-(k+1)}}{C_n^k\left(\frac{10}{n}\right)^k\left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-k}} = \frac{C_n^{k+1}}{C_n^k}\times\frac{10}{n}\times\frac{1}{\frac{n-10}{n}} = \frac{\frac{A_n^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{A_n^k}{k!}}\times\frac{10}{n-10}$$

$$= \frac{n\times(n-1)\times...\times(n-k)}{n\times(n-1)\times...\times(n-k+1)}\times\frac{k!}{(k+1)!}\times\frac{10}{n-10} = \boxed{\frac{n-k}{k+1}\times\frac{10}{n-10}}$$

ب) لدينا :

$$\begin{aligned}
u_k \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{n-k}{k+1}\times\frac{10}{n-10}\geq 1\\
&\Leftrightarrow 10(n-k)\geq(k+1)(n-10)\\
&\Leftrightarrow 10n-10k\geq nk-10k+n-10\\
&\Leftrightarrow 0\geq nk+n-10-10n\\
&\Leftrightarrow 0\geq nk-10-9n\\
&\Leftrightarrow 10+9n\geq nk\\
&\Leftrightarrow k\leq\frac{10+9n}{n}=9+\frac{10}{n}
\end{aligned}$$

وبما أن : $\boxed{\frac{10}{n}\leq\frac{1}{2}}$ $n\geq 20 \Rightarrow \frac{1}{n}\leq\frac{1}{20}\Rightarrow$ ؛ فإن : $u_k \geq 1 \Leftrightarrow k\leq 9+\frac{1}{2}$ وحيث أن : $k\in\mathbb{N}$ ؛ فإن :

$$(i): \boxed{u_k \geq 1 \Leftrightarrow 0\leq k\leq 9}$$

ولدينا :

$$\begin{aligned}
u_k \leq &\Leftrightarrow \frac{n-k}{k+1}\times\frac{10}{n-10}\leq 1\\
&\Leftrightarrow 10n-10k\leq nk+n-10k-10\\
&\Leftrightarrow 9n\leq nk-10\\
&\Leftrightarrow 9n+10\leq nk\\
&\Leftrightarrow 9+\frac{10}{n}\leq k\\
&\Leftrightarrow 10\leq k\leq n-1
\end{aligned}$$

(لأن : $k\in\mathbb{N}$ و $k\in\{0,1,...,n-1\}$ و $n\geq 20\Rightarrow 0<\frac{10}{n}\leq\frac{1}{2}$)

وبالتالي فإن : $(ii): \boxed{u_k\leq 1\Leftrightarrow 10\leq k\leq n-1}$

ج) لدينا : $u_0\geq 1\Rightarrow\frac{p_1}{p_0}\geq 1\Rightarrow p_1\geq p_0$

و $u_1\geq 1\Rightarrow\frac{p_2}{p_1}\geq 1\Rightarrow p_2\geq p_1$

j j j j j

و $u_9 \ge 1 \Rightarrow \frac{p_{10}}{p_9} \ge 1 \Rightarrow p_{10} \ge p_9$ إذن : $(i): p_{10} \ge p_9 \ge ... \ge p_2 \ge p_1 \ge p_0$

ولدينا : $u_{10} \le 1 \Rightarrow \frac{p_{11}}{p_{10}} \le 1 \Rightarrow p_{11} \le p_{10}$

و $u_{11} \le 1 \Rightarrow \frac{p_{12}}{p_{11}} \le 1 \Rightarrow p_{12} \le p_{11}$

و $\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

و $u_{n-1} \le 1 \Rightarrow \frac{p_n}{p_{n-1}} \le 1 \Rightarrow p_n \le p_{n-1}$ إذن : $(ii): p_n \le p_{n-1} \le ... \le p_{12} \ge p_{11} \ge p_{10}$

ومن (i) و (ii) نستنتج أن : $\boxed{\forall k \in \{0,1,2,...,n\}: \quad p_k \le p_{10}}$.

إذن أكبر قيمة M للعدد p_k عندما يتغير k في $\{0,1,2,...,n\}$ هي :

$$M = p_{10} = C_n^{10}\left(\frac{10}{n}\right)^{10}\left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-10} = \frac{n!}{10!(n-10)!}\times\frac{10^{10}}{n^{10}}\times\frac{(n-10)^{n-10}}{n^{n-10}} = \boxed{\frac{n!}{n^n}\times\frac{10^{10}}{10!}\times\frac{(n-10)^{n-10}}{(n-10)!}}$$

التمرين 4:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(x) = (1+x)e^{-2x}$$

I – 1) أ) لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(1+x)e^{-2x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-2x} + xe^{-2x} = 0+0 = \boxed{0}$

لأنه بوضع $t=-2x$ ؛ نجد : $x \to +\infty \Rightarrow t \to -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} xe^{2x} = \lim_{t\to-\infty} -\frac{1}{2}te^t = 0$

وبوضع $t=-2x$ ؛ نجد : $x \to -\infty \Rightarrow t \to +\infty$ و :

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(1+x)e^{-2x} = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}t\right)e^t = -\infty\times+\infty = \boxed{-\infty}$.

ب) – لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ؛ إذن (C) يقبل مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$ معادلته $\boxed{y=0}$.

- لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)e^{-2x} = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{2}{t}+1\right)e^t = \boxed{+\infty}$

حيث: $t=-2x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$. إذن (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $-\infty$ اتجاهه محور الأراتيب .

2) ليكن $x \in \mathbb{R}$, لدينا : $f'(x) = (1+x)'e^{-2x} + (1+x)(-2)e^{-2x} = (1-2(1+x))e^{-2x} = \boxed{-(1+2x)e^{-2x}}$.

إذن إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ هي عكس إشارة $1+2x$. ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ كما يلي :

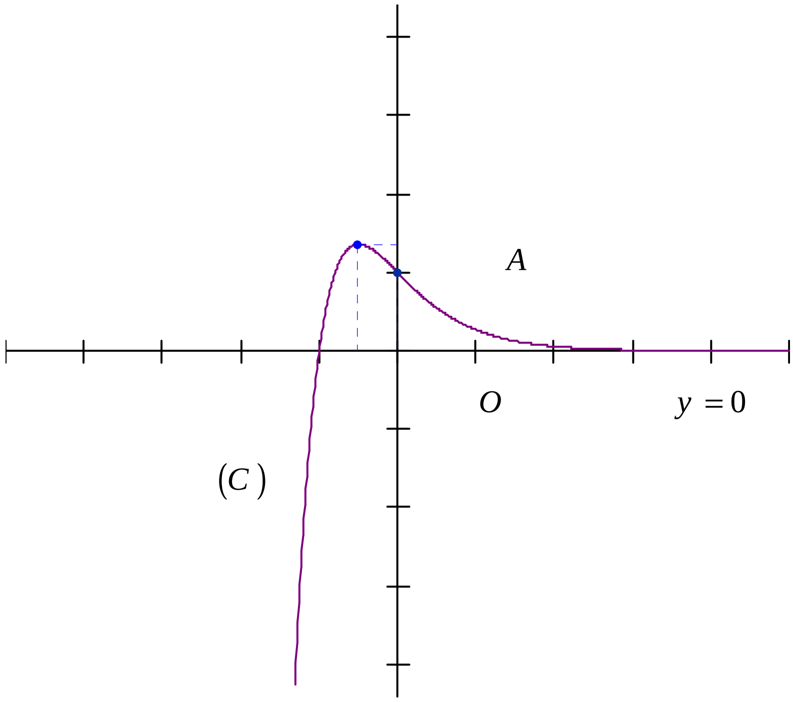
x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}e$	$\searrow$	0

3) أ) ليكن $x \in \mathbb{R}$, لدينا : $f''(x) = -(1+2x)'e^{-2x} - (1+2x)(-2)e^{-2x} = (-2+2(1+2x))e^{-2x} = \boxed{4xe^{-2x}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
تقعر المنحنى (C)		(C) مقعر	$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	(C) محدب	

إذن (C) يقبل النقطة $A(0,1)$ كنقطة انعطاف .

ب) إنشاء المنحنى (C) في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$:



4) أ) لدينا : $f(x)=(1+x)e^{-2x}$ و $f'(x)=-(1+2x)e^{-2x}$ و $f''(x)=4xe^{-2x}$. إذن :

$$f''(x)+3f'(x)+2f(x)=4xe^{-2x}-3(1+2x)e^{-2x}+2(1+x)e^{-2x}=[4x-3(1+2x)+2(1+x)]e^{-2x}$$
$$=[4x-3-6x+2+2x]e^{-2x}=-e^{-2x}$$

ومنه فإن f حل خاص للمعادلة التفاضلية : $(E):y''+3y'+2y=-e^{-2x}$.

ب) لنحل المعادلة التفاضلية $(E'):y''+3y'+2y=0$.

المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E') هي : $(F):\boxed{r^2+3r+2=0}$. مميزها هو $\Delta=3^2-4\times1\times2=9-8=1$

إذن للمعادلة (F) حلين مختلفين هما : $r_1=\frac{-3+1}{2}=\boxed{-1}$ و $r_2=\frac{-3-1}{2}=\boxed{-2}$.

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية (E') هو : $y=\alpha e^{-x}+\beta e^{-2x}\quad/(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) هو : $y=\alpha e^{-x}+\beta e^{-2x}+f(x)\quad/(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. أي :

$$\boxed{y=\alpha e^{-x}+\beta e^{-2x}+(1+x)e^{-2x}\quad/(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2}$$

II - ليكن $n\in\mathbb{N}^*$.

ونعتبر A_n : مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل ومحور الأراتيب والمستقيم ذي المعادلة $x=n$.

1) لدينا : $A_n=\int_0^n f(x)dx=\int_0^n(1+x)e^{-2x}dx=\int_0^n e^{-2x}dx+\int_0^n xe^{-2x}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^n+I=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2n}+I$

حيث : $I=\int_0^n xe^{-2x}dx$. نضع : $\begin{cases}u'(x)=e^{-2x}\\ v(x)=x\end{cases}$. إذن : $\begin{cases}u(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}\\ v'(x)=1\end{cases}$. باستعمال مكاملة بالأجزاء نجد :

$$I=\int_0^n u'(x)v(x)dx=[u(x)v(x)]_0^n-\int_0^n u(x)v'(x)dx=\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right]_0^n+\frac{1}{2}\int_0^n e^{-2x}dx$$
$$=-\frac{1}{2}ne^{-2n}+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^n=-\frac{1}{2}ne^{-2n}-\frac{1}{4}\left(e^{-2n}-1\right)$$

ومنه فإن : $A_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2n}-\frac{1}{2}ne^{-2n}-\frac{1}{4}\left(e^{-2n}-1\right)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}\right)e^{-2n}+\frac{3}{4}=\boxed{-\frac{1}{4}(3+2n)e^{-2n}+\frac{3}{4}}$

2) لدينا :

. $m=2n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$: حيث ؛ $\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{4}(3+2n)e^{-2n}+\frac{3}{4} = \lim_{m\to+\infty} -\frac{1}{4}\left(\frac{3+m}{e^m}\right)+\frac{3}{4}$

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{3}{4}(u.a.)}$. $\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{m\to+\infty} -\frac{1}{4}\left(\frac{3}{e^m}+\frac{1}{\frac{e^m}{m}}\right)+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$: إذن

III – نضع : $\boxed{\forall n\in \mathbb{N}^*: \quad u_n = n\int_0^1 [f(x)]^n dx}$

1) نضع $t=nx$. إذن : $x=0 \Leftrightarrow t=0$ و $x=1 \Leftrightarrow t=n$ و $dt=ndx$. ومنه باستعمال مكاملة بتغيير المتغير نجد :

$$u_n = \int_0^n \left[f\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n dt = \int_0^n \left[\left(1+\frac{t}{n}\right)e^{-2\frac{t}{n}}\right]^n dt = \boxed{\int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}dt}$$

2) أ) ليكن $u\in[1,2]$. إذن $1\le u\le 2$ ومنه فإن : $\frac{1}{u}\le 1$. ولدينا : $\frac{1}{u}-(2-u)=\frac{1-2u+u^2}{u}=\frac{(u-1)^2}{u}\ge 0$. إذن :

$2-u\le\frac{1}{u}$. وبالتالي فإن : $\forall u\in[1,2]: \quad \boxed{2-u\le\frac{1}{u}\le 1}$

ب) لدينا : $\forall u\in[1,2]: \quad 2-u\le\frac{1}{u}\le 1$. نضع : $t=u-1$ أي $u=t+1$. إذن : $u\in[1,2]\Leftrightarrow t\in[0,1]$.

ومنه نستنتج التأطير التالي : $\forall t\in[0,1]: \quad 2-(t+1)\le\frac{1}{t+1}\le 1$. أي : $\boxed{\forall t\in[0,1]: \quad 1-t\le\frac{1}{t+1}\le 1}$

إذن : $\forall u\in[0,1]: \quad \int_0^u (1-t)dt \le \int_0^u \frac{1}{t+1}dt \le \int_0^u dt \Rightarrow \forall u\in[0,1]: \quad \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^u \le [\ln(t+1)]_0^u \le u-0$

$$\Rightarrow \boxed{\forall u\in[0,1]: \quad u-\frac{u^2}{2}\le \ln(u+1)\le u}$$

نضع : $u=\frac{x}{n}$. لدينا $x\in[0,n]$ ؛ إذن $u=\frac{x}{n}\in[0,1]$. ولدينا : $u-\frac{u^2}{2}\le\ln(u+1)\le u$. إذن :

$\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n}\le\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\le\frac{x}{n}$ ؛ ومنه نجد : $\boxed{x-\frac{x^2}{2n^2}\le n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\le x}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*; \quad \forall x\in[0,n];$

3) أ) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$. لدينا : $u_n=\int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}dt$. ليكن $t\in[0,n]$. لدينا :

$$n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)\le t \quad\Rightarrow\quad \ln\left(\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\right)\le t$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \le e^t$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t} \le e^{-t}$$

$$\Rightarrow \int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}dt \le \int_0^n e^{-t}dt$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n\le\int_0^n e^{-t}dt}$$

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*: \quad u_n\le\int_0^n e^{-x}dx}$

ب) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$. لدينا :

$$t-\frac{t^2}{2n}\le n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right) \quad\Rightarrow\quad e^{t-\frac{t^2}{2n}}\le\left(1+\frac{t}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow\quad e^{-t-\frac{t^2}{2n}}\le\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\int_0^n e^{-t-\frac{t^2}{2n}}dt\le u_n}$$

لدينا : $n\ge1\Rightarrow n^2\ge1\Rightarrow n^3\ge n\Rightarrow n\ge\sqrt[3]{n}$. ولدينا : $\forall t\in[0,n]:e^{-t-\frac{t^2}{2n}}\ge0$ ؛ إذن :

و لدينا : $\int_0^{\sqrt[3]{n}}e^{-t-\frac{t^2}{2n}}dt\le\int_0^n e^{-t-\frac{t^2}{2n}}dt$

$$0\le t\le\sqrt[3]{n}\quad\Rightarrow\quad 0\le t^2\le\sqrt[3]{n^2}$$

$$\Rightarrow\quad -\sqrt[3]{n^2}\le-t^2\le0$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}\le-\frac{t^2}{2n}\le0$$

$$\Rightarrow\quad e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}}\le e^{-\frac{t^2}{2n}}\le1$$

$$\Rightarrow\quad e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}-t}\le e^{-t-\frac{t^2}{2n}}$$

$$\Rightarrow\quad \int_0^{\sqrt[3]{n}}e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}-t}dt\le\int_0^{\sqrt[3]{n}}e^{-t-\frac{t^2}{2n}}dt$$

$$\Rightarrow\quad e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}}\int_0^{\sqrt[3]{n}}e^{-t}dt\le\int_0^{\sqrt[3]{n}}e^{-t-\frac{t^2}{2n}}dt\le\int_0^n e^{-t-\frac{t^2}{2n}}dt\le u_n$$

من أ و ب نستنتج أن : $(*):\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*:\quad e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}}\int_0^{\sqrt[3]{n}}e^{-x}dx\le u_n\le\int_0^n e^{-x}dx}$

ج) لدينا : $\int_0^n e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^n=\boxed{1-e^{-n}}$. ولدينا : $\int_0^{\sqrt[3]{n}}e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^{\sqrt[3]{n}}=\boxed{1-e^{-\sqrt[3]{n}}}$. إذن العلاقة $(*)$ تصير :

$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*:\quad e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}}\left(1-e^{-\sqrt[3]{n}}\right)\le u_n\le1-e^{-n}}$. وبما أن : $\lim_{n\to+\infty}1-e^{-n}=\boxed{1}$ و $\lim_{n\to+\infty}e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}}\left(1-e^{-\sqrt[3]{n}}\right)=\boxed{1}$

فإنه حسب مصاديق التقارب , لدينا : (u_n) متتالية متقاربة نهايتها : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=1}$

4) ليكن $a\in]0,1[$.

أ) لدينا f تناقصية على المجال $[0,+\infty[$. إذن : $\left(\ f(1)=2e^{-2}\ge0\ \right)$

$$\forall x\in[a,1]:a\le x\le1\quad\Rightarrow\quad f(1)\le f(x)\le f(a)$$

$$\Rightarrow\quad 0\le\left(f(x)\right)^n\le\left(f(a)\right)^n$$

$$\Rightarrow\quad \int_a^1 n\left(f(x)\right)^n dx\le n\left(f(a)\right)^n\int_a^1 dx$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\int_a^1 n\left(f(x)\right)^n dx\le n(1-a)\left(f(a)\right)^n}$$

ب) لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}^*:0\le\int_a^1 n\left(f(x)\right)^n dx\le n(1-a)\left(f(a)\right)^n$. و

$\lim_{n\to+\infty}n(1-a)\left(f(a)\right)^n=\lim_{n\to+\infty}(1-a)ne^{n\ln(f(a))}$.

و : $0<a<1\Rightarrow f(1)<f(a)<f(0)\Rightarrow0<2e^{-2}<f(a)<1\Rightarrow\boxed{\ln\left(f(a)\right)<0}$.

إذن : $\lim_{n\to+\infty}n(1-a)[f(a)]^n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-a}{\ln\left(f(a)\right)}\times n\ln\left(f(a)\right)e^{n\ln(f(a))}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-a}{\ln\left(f(a)\right)}\times xe^x=\boxed{0}$ ؛

حيث : $x = n\ln\left(f(a)\right)$ ؛ بما أن $\ln\left(f(a)\right) < 0$ فإن : $x \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

ولدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \boxed{0}$. حسب مصاديق التقارب ؛ لدينا : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^1 n\left[f(x)\right]^n dx = 0}$

ج) لدينا :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n\left[f(x)\right]^n dx = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_0^a n\left[f(x)\right]^n dx + \int_a^1 n\left[f(x)\right]^n dx = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^a n\left[f(x)\right]^n dx = 1}$$

لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^1 n\left[f(x)\right]^n dx = 0$.

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall a \in \left]0,1\right[: \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^a n\left[f(x)\right]^n dx = 1}$

انتهى

المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والشباب	الامتحـــان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالــــــوريا الدورة العادية: يونيو 2004	الصفـــحة	1/3
		مدة الإنجاز	4 ساعات
المادة: الرياضيات الشعبة: علوم رياضية(أ) و(ب)		المعامـــل	10

يسمح باستعمال حاسبة غير قابلة للبرمجة

التمرين1 (3نقط)

1- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا

أ) بين أ نه اذا كان n فرديا فان $n^2 \equiv 1 \quad [8]$

ب) بين أ نه اذا كان n زوجيا فان $n^2 \equiv 0 \quad [8]$ أو $n^2 \equiv 4 \quad [8]$

2- ليكن a و b و c أعدادا صحيحة طبيعية فردية.

أ) بين أن $a^2+b^2+c^2$ ليس مربعا كاملا (أي ليس مربع للعدد صحبح طبيعي)

ب) بين أن $2(ab+bc+ac) \equiv 6 \quad [8]$

(يمكن ملاحظة $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+abc+2ac$)

ج) استنتج أن $2(ab+bc+ac)$ ليس مربعا كاملا.

د) بين أن $ab+bc+ac$ ليس مربعا كاملا.

التمرين2 (3نقط)

لتكن E مجموعة المصفوفات التي تكتب على شكل $M_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$

و F مجموعة المصفوفات التي تكتب على شكل $N_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}$

حيث $a \in \mathbb{R}$.

1- أ) بين أن $M_a \times M_b = M_{ab} \qquad \forall (a;b) \in \mathbb{R}^{*2}$

ب) ليكن φ التطبيق المعرف من $\mathbb{R}^*$ نحو E بحيث $\varphi(a) = M_a$

بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*;\times)$ نحو $(E;\times)$

استنتج البنية الجبرية لـ $(E;\times)$

2- أ) بين أن $N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}} \qquad \forall (a;b) \in \mathbb{R}^{*2}$

ب) نضع $G = E \cup F$. بين أن $(G;\times)$ زمرة

ج) هل $(G;\times)$ زمرة تبادلية؟

التمرين3 (3.50 ن)

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+z+1=1$

2- لكل عدد عقدي z حيث $z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ مع $-\pi \le \theta \le \pi$ و $\theta \ne \frac{2\pi}{3}$ و $\theta \ne -\frac{2\pi}{3}$

نضع $z' = \frac{1}{z^2+z+1}$

أ) تحقق أن $1+z+z^2 = z(1+z+\overline{z})$

ب) أجسب معبار وعمدة z' بدلالة θ

ج) نضع $z'=x+iy$ حيث $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

بين أن $x^2+y^2=(1-2x)^2$

د) استنتج أن النقطة M ذات اللحق z' تنتمي الى هذلول يتم تحديد مركزه و رأسيه و مقاربيه.

التمرين4 (10نقط)

I) نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}$

1- أحسب نهايات f عند محدات مجموع تعريفها

2- أدرس تغيرات f

3- ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم

أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C)

ج أنشئ (C)

II) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=1$; $u_{n+1}={u_n}^2 f(u_n)=u_n e^{-u_n}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

1- بين أن $e^x\geq x+1$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

2- استنتج أن $x^2 f(x)\leq\dfrac{x}{x+1}$ $\forall x\succ 0$

3- أ) باستعمال البرهان بالترجع بين أن $0\prec u_n\leq\dfrac{1}{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ب) بين أن (u_n) متقاربة وحدد نهايتها

4- نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $v_n=\sum_{k=0}^{n-1}u_k$

أ- بين أنه : $v_n=\ln\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

ب- حدد نهاية (v_n)

III) نعتبر الدالة F المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي:

$$F(x)=\int_{x^2}^{4x^2}f(t)\,dt \quad x\succ 0 \quad \text{و} \quad F(0)=2\ln(2)$$

1- أ) تحقق أن $\int_{x^2}^{4x^2}\frac{1}{t}dt=2\ln(2)$ $(\forall x\succ 0)$

ب) باستعمال نتيجة $II-1)$، بين أن $-t\leq e^{-t}-1\leq 0$ $(\forall t\succ 0)$

2- أ) بين أن $-3x^2\prec F(x)-2\ln(2)\leq 0$ $\forall x\succ 0$

ب) استنتج أن F متصلة و قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

3- أ) بين أن $f(t)\prec e^{-t}$ $\forall t\geq 1$

ب) استنتج $\lim_{x\to+\infty}F(x)$

4- أ) بين أن أ F قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و أحسب $F'(x)$

ب) أعط جدول تغيرات F

ج) أنشئ المنحنى C_F في معلم متعامد ممنظم.

5- لتكن G الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $G(x)=\int_x^{4x}e^{-t}\ln(t)\,dt$

أ) بين أن $G(x)=F\left(\sqrt{x}\right)-e^{-4x}\ln(4x)+e^{-x}\ln(x) \quad \forall x \succ 0$

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{-x}-e^{-4x}\right)\ln(x)$

ت) استنتج $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x)$

Exercice 1 (3 points)

1 Congruence de n

a. n impair implique n^2 congru à 1 modulo 8

Soit n un entier impair,

Il existe donc un entier k tel que $n=2k+1$, d'où $n^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1$.

Si k est pair alors $k+1$ est impair et si k est impair alors $k+1$ est pair, donc dans tous les cas, $k(k+1)$ est pair, c'est à dire qu'il existe un entier p tel que $k(k+1)=2p$.

On en déduit alors que $n^2=8p+1$, autrement dit $n^2\equiv 1\ \ [8]$.

> Finalement, si n est un entier naturel impair, alors n^2 est congru à un modulo huit.

b. n pair implique n^2 congru à 0 ou à 4 modulo 8

Soit n un entier pair.

Il existe alors un entier k tel que $n=2k$, soit $n^2=4k^2$. On distingue alors deux cas,

>> Premier cas

Si k est pair, alors il existe un entier p tel que $k=2p$, d'où $n^2=4(4p^2)=16p^2 \quad\Rightarrow\quad n^2\equiv 0\ \ [8]$

>> Deuxième cas

Si k est impair, alors il existe un entier p tel que $k=2p+1$, d'où,

$n^2=4(2p+1)^2=16k^2+16k+4=16(k^2+k)+4$

Comme $16(k^2+k)$ est divisible par 8, alors $n^2\equiv 4\ \ [8]$.

> Finalement, si n est un entier naturel pair, alors n^2 est congru à zéro ou à quatre modulo huit.

2 Un carré parfait

a. a^2 + b^2 + c^2 n'est pas un carré parfait

a, b et c sont trois entiers naturels impairs.

D'après la question 1.a, on a $a^2\equiv 1\ \ [8]$, $b^2\equiv 1\ \ [8]$ et $c^2\equiv 1\ \ [8]$, d'où $a^2+b^2+c^2\equiv 3\ \ [8]$.

D'après la question 1, un carré parfait est congru à zéro, à un ou à quatre modulo huit, donc $a^2+b^2+c^2$ n'est pas un carré parfait.

> $a^2+b^2+c^2$ n'est pas un carré parfait.

b. 2(ab+bc+ac) est congru à 6 modulo 8

On a $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$,

D'où $(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=2(ab+ac+bc)$.
Comme a, b et c sont trois entiers naturels impairs alors $a+b+c$ est aussi impair.

D'après la question 1.a, on a $(a+b+c)^2 \equiv 1\ [8]$.

D'après la question 2.a, on a $a^2+b^2+c^2 \equiv 3\ [8]$.

Donc, $(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=2(ab+ac+bc) \equiv 1-3\ [8] \equiv -2\ [8] \equiv 6\ [8]$

$2(ab+ac+bc)$ est congru à 6 modulo 8.

c. 2(ab + bc + ac) n'est pas un carré parfait

d'après la question 1, un carré parfait est congru soit à zéro, soit à quatre modulo huit, comme $2(ab+ac+bc) \equiv 6\ [8]$ alors $2(ab+ac+bc)$ n'est pas un carré parfait.

d. ab + bc + ac n'est pas un carré parfait :

D'après la question 2.b, on a $2(ab+ac+bc) \equiv 6\ [8]$, donc il existe un entier naturel p tel que $2(ab+ac+bc)=8p+6$, autrement dit, $ab+ac+bc=4p+3$.
D'où, $ab+ac+bc \equiv 3\ [4]$.

Montrons maintenant qu'un carré parfait est congru soit à zéro soit à un modulo quatre.
Soit n un entier naturel,
>> Si n est impair, alors il existe un entier k tel que $n=2k+1$, d'où $n^2=4k^2+4k+1 \Rightarrow n^2 \equiv 1\ [4]$.

>> Si n est pair, alors il existe un entier k tel que $n=2k$, d'où $n^2=4k^2 \Rightarrow n^2 \equiv 0\ [4]$.

>> Conclusion
Un carré parfait est congru soit à zéro soit à un modulo quatre, comme $ab+ac+bc \equiv 3\ [4]$ alors $ab+ac+bc$ n'est pas un carré parfait.

Exercice 2 (3 points)

1 Une structure algébrique

a. Produit de deux matrices

Soient a et b deux réels non nuls, on a,

$$M_a \times M_b = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b-\frac{1}{b}\right) \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & \frac{a}{\sqrt{3}}\left(b-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{b\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{ab} \end{pmatrix}$$

Or $\frac{a}{\sqrt{3}}\left(b-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{b\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(ab-\frac{a}{b}+\frac{a}{b}-\frac{1}{ab}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(ab-\frac{1}{ab}\right)$, d'où,

$$\boxed{M_a \times M_b = \begin{pmatrix} ab & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(ab-\frac{1}{ab}\right) \\ 0 & \frac{1}{ab} \end{pmatrix} = M_{ab}.}$$

b. φ est un morphisme

φ est l'application définie de $\mathbb{R}^*$ dans E par $\varphi(a)=M_a$.

Montrer que φ est un morphisme de $\left(\mathbb{R}^* \,;\times\right)$ dans $(E\,;\times)$ revient à montrer que $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$.

On a $\varphi(ab)=M_{ab}=M_a \times M_b$ d'après la question précédente, donc $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$.

c. Structure algébrique de l'ensemble E

L'application φ est bijective, comme $\mathbb{R}^*$ est un groupe multiplicatif alors E est aussi un groupe multiplicatif.

2 Un groupe

a. Produit de deux matrices

Soient a et b deux réels non nuls, on a,

$$N_a \times N_b = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b-\frac{1}{b}\right) \\ -b\sqrt{3} & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab-b\left(a-\frac{1}{a}\right) & \frac{a}{\sqrt{3}}\left(b-\frac{1}{b}\right)-\frac{b}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ -ab\sqrt{3}+ab\sqrt{3} & -a\left(b-\frac{1}{b}\right)+ab \end{pmatrix}$$

d'où, $N_a \times N_b = \begin{pmatrix} \frac{b}{a} & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right) \\ 0 & \frac{a}{b} \end{pmatrix} = M_{\frac{b}{a}}$.

b. G est un groupe

1/ G est stable par la loi $\times$:

On a $G = E \cup F$ et on propose de montrer que G muni de la multiplication est un groupe.
Soient x et y deux éléments non nuls de G.

- Si x et y sont dans E, comme E est un groupe (question 1.c) alors $x \times y \in E$ (*produit de deux matrices 2x2 donne une matrice 2x2*) et à fortiori $x \times y \in G$.
- Si x et y sont dans F alors il existe deux réels non nuls a et b tels que $x = N_a$ et $y = N_b$ et donc $x \times y = N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}} \in F$, d'où $x \times y \in G$.
- Si x est dans F et y est dans E, alors il existe deux réels non nuls a et b tels que $x = N_a$ et $y = M_b$, d'où $x \times y = N_a \times M_b = N_a \times M_{\frac{ab}{a}} = N_a \times (N_a \times N_{ab})$, d'après la question 2.a.

  Alors, $x \times y = (N_a \times N_a) \times N_{ab}$, (le produit matriciel étant associatif).

  Or $N_a \times N_a = M_{\frac{a}{a}} = M_1 = I_2$, avec $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (*Matrice identité*).

  D'où $x \times y = I_2 \times N_{ab} = N_{ab} \in F$ et à fortiori $x \times y \in G$.
- Si x est dans E et y est dans F, alors il existe deux réels non nuls a et b tels que $x = M_a$ et $y = N_b$, d'où :

  $$x \times y = M_a \times N_b = \left(N_{\frac{b}{a}} \times N_b \right) \times N_b = N_{\frac{b}{a}} \times (N_b \times N_b) = N_{\frac{b}{a}} \times M_{\frac{b}{b}} = N_{\frac{b}{a}} \times M_1 = N_{\frac{b}{a}} \times I_2 = N_{\frac{b}{a}} \in F$$

  donc, $x \times y \in G$.

2/ G admet un élément neutre :

De plus $I_2 = M_1 \in G$ et $\begin{cases} M_a \times I_2 = I_2 \times M_a = M_a \\ N_a \times I_2 = I_2 \times N_a = N_a \end{cases}$, donc I_2 est l'élément neutre de G.

3/ Les éléments de G sont inversibles :

On a $N_a \times N_a = M_1 = I_2$ donc l'inverse de N_a par la loi $\times$ est N_a ($N_a \times (N_a)^{-1} = I_2$) et est donc dans G.

De même, $M_a \times M_{\frac{1}{a}} = I_2$, donc l'inverse de M_a par la loi $\times$ est $M_{\frac{1}{a}}$ et est donc dans G .

c. Le groupe G est-il commutatif ?

Soient N_a et N_b deux éléments de G et soient a et b deux réels non nuls.

Si le groupe G est commutatif alors $N_a \times N_b = N_b \times N_a$ autrement dit $M_{\frac{b}{a}} = M_{\frac{a}{b}}$.

Or en prenant $a = 1$ et $b = 2$, on a :

$$M_{\frac{2}{1}} = M_2 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } M_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-3}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donc $M_{\frac{b}{a}} \neq M_{\frac{a}{b}} \Rightarrow N_a \times N_b \neq N_b \times N_a$.

G n'est pas un groupe commutatif.

Exercice 3 (3 points et ½)

1 Résolution d'une équation

Le discriminant du polynôme z^2+z+1 et négatif et vaut -3, l'équation $z^2+z+1=0$ admet donc deux racines complexes conjugués notés r_1 et r_2 avec :

$$\boxed{r_1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \text{ et } r_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.}$$

2 Un ensemble de points

a. Une égalité

Soit $z\neq 0$,

On a $z^2+z+1=z\left(1+z+\frac{1}{z}\right)$, comme $z=a+ib$, alors $\frac{1}{z}=\frac{a-ib}{|z|^2}$.

Or dans le cadre de cet exercice, on a $|z|=1$ donc $\frac{1}{z}=a-ib=\overline{z}$ d'où l'égalité $z^2+z+1=z(1+z+\overline{z})$.

b. Le module et un argument de z'

On a $z'=\dfrac{1}{1+z+z^2}=\dfrac{1}{z(1+z+\overline{z})}$

Comme $z=e^{i\theta}$ alors $\frac{1}{z}=e^{-i\theta}$, de plus on a $z+\overline{z}=2\cos(\theta)$ d'où,

$$|z'|=\left|\frac{1}{z(1+z+\overline{z})}\right|=\left|\frac{1}{z}\right|\times\left|\frac{1}{1+z+\overline{z}}\right|=\frac{1}{1+2\cos(\theta)}$$

et $\arg(z')=\arg\left(\frac{1}{z}\right)+\arg\left(\frac{1}{1+z+\overline{z}}\right)=\arg\left(\frac{1}{z}\right)+\arg\left(\frac{1}{1+2\cos(\theta)}\right)$, on distingue alors deux cas,

>> Premier cas

$1+2\cos(\theta)>0$, alors $\arg(z')=\arg\left(\frac{1}{z}\right)+\arg\left(\frac{1}{1+2\cos(\theta)}\right)=-\theta\ \equiv[\pi]$.

>> Deuxième cas

$1+2\cos(\theta)<0$, alors $\arg(z')=\arg\left(\frac{1}{z}\right)+\arg\left(\frac{-1}{1+2\cos(\theta)}\right)=-\theta-\pi\ \equiv[\pi]$.

c. Une égalité

On pose $z'=x+iy$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ et on propose de montrer que $x^2+y^2=(1-2x)^2$.

On a $z' = \frac{1}{z} \times \frac{1}{1+z+\bar{z}} = (\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)) \times \frac{1}{1+2\cos(\theta)} = \frac{\cos(\theta)-i\sin(\theta)}{1+2\cos(\theta)} = \frac{\cos(\theta)-i\sin(\theta)}{1+2\cos(\theta)}$

Comme $z' = x + i\,y$, alors $x = \frac{\cos(\theta)}{1+2\cos(\theta)}$ et $y = \frac{-\sin(\theta)}{1+2\cos(\theta)}$.

D'où, $x^2 + y^2 = \frac{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}{(1+2\cos(\theta))^2} = \frac{1}{(1+2\cos(\theta))^2}$,

Il reste à montrer que $(1-2x)^2 = \frac{1}{(1+2\cos(\theta))^2}$;-)

On a $(1-2x)^2 = \left(1-\frac{2\cos(\theta)}{1+2\cos(\theta)}\right)^2 = \left(\frac{1}{1+2\cos(\theta)}\right)^2$, CQFD.

Finalement, $x^2 + y^2 = (1-2x)^2$.

d. L'ensemble des points M

Le point M est le point d'affixe z', il s'agit de montrer que cet ensemble de points appartient à une hyperbole que l'on caractérisera.

On a d'après la question précédente, $x^2 + y^2 = (1-2x)^2$, soit,

$$y^2 = (1-2x)^2 - x^2 = 3x^2 - 4x + 1 = 3\left(x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{1}{3}\right),$$

$$\frac{y^2}{3} = \left(x-\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} + \frac{3}{9} = \left(x-\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{9},$$

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{y^2}{3} = \frac{1}{9}$$

$$9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 - 3y^2 = 1$$

$$\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1.$$

On reconnaît alors l'équation d'une hyperbole dont le foyer est le point de coordonnées $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$, de demi axe transverse $\frac{1}{3}$ et de demi axe non transverse $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 4 (10 points et ½)

I Etude de f

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

1 Limites de f aux bornes de son ensemble de définition

>> Limite de f au voisinage de $-\infty$

Dans un soucis de clarté, on pose $y = -x$, on a alors ,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{y}}{-y} = -\lim_{y\to+\infty} \frac{e^{y}}{y} = -\infty,$$

d'où, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

>> Limite de f à gauche de zéro

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \dfrac{e^{-x}}{x}$, comme $\lim_{x\to0^-} e^{-x} = 1$ et $\lim_{x\to0^-} x = 0^-$,

Alors, $\boxed{\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty}$.

>> Limite de f à droite de zéro

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \dfrac{e^{-x}}{x}$, comme $\lim_{x\to0^+} e^{-x} = 1$ et $\lim_{x\to0^+} x = 0^+$,

alors $\boxed{\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty}$.

>> Limite de f au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\,e^{x}} = 0.$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}.$$

2 Variations de f

>> Expression de la dérivée

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est également dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = \dfrac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = \dfrac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

>> Signe de la dérivée

Comme pour tout réel x dans $\mathbb{R}^*$, $x^2 > 0$ et $e^{-x} > 0$, alors le signe de f' ne dépend que de celui de $-(x+1)$, c'est à dire que $f'(x) < 0$ sur $]-1, +\infty[$, $f'(x) > 0$ sur $]-\infty, -1[$ et $f'(-1) = 0$.

>> Tableau de variations

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		+		-	$\|$	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	↘	0

3 Branches infinies et construction de C

a. Nature des branches infinies de C

>> Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, alors la courbe C admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de + l'infini.

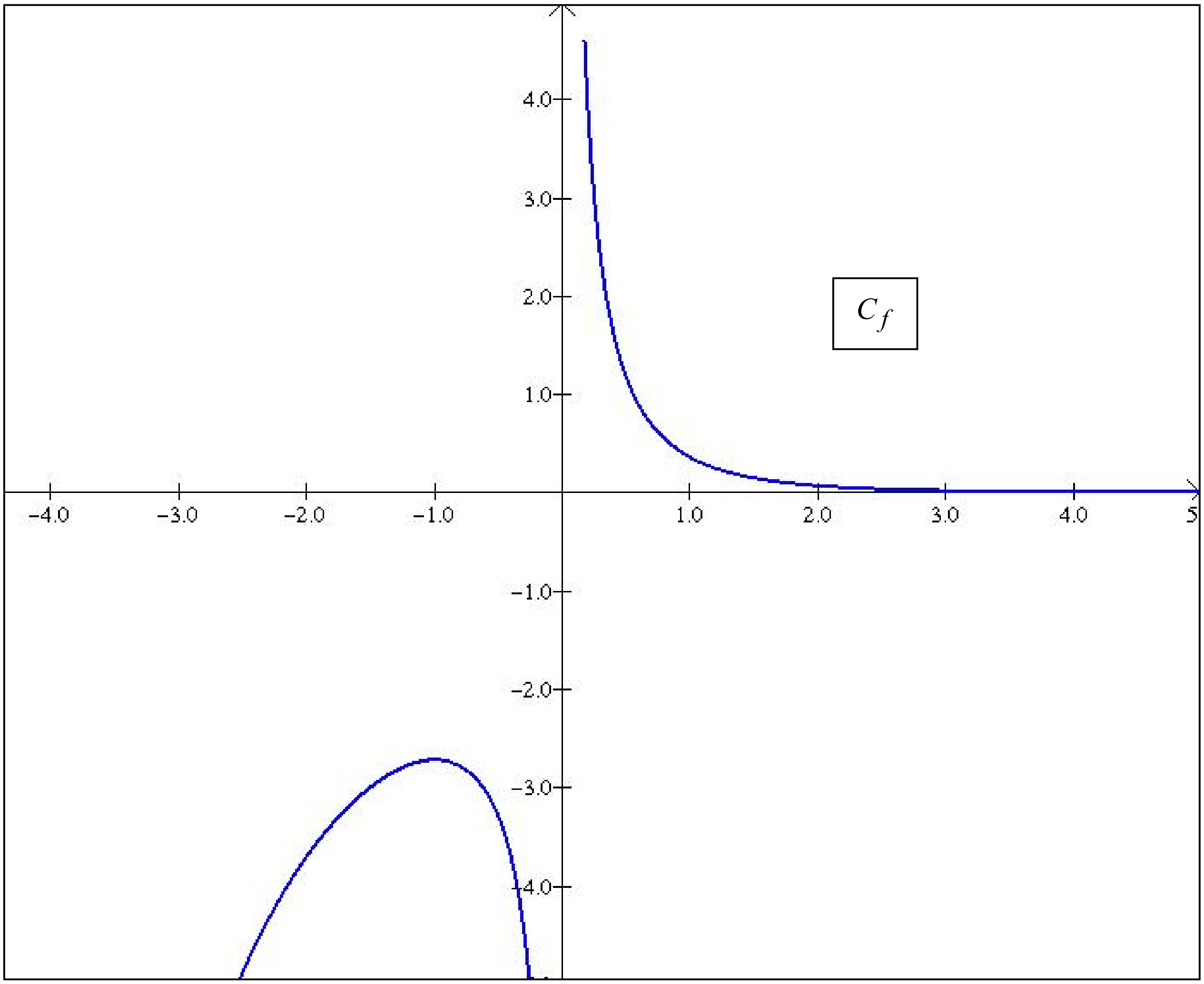
>> Puisque $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$, alors la courbe C admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

>> Puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, alors la courbe C admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

>> Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, il faut calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^2} = +\infty$, donc la courbe C admet au voisinage de – l'infini une branche parabolique.

b. Représentation graphique de la courbe C



II Etude de la suite (u_n)

1 Une inégalité

Il s'agit de montrer que pour tout réel x on a $e^x \geq x+1$, pour cela il suffit d'étudier le signe de la différence entre les deux membres de cette inégalité.

Posons $d(x) = e^x - x - 1$ et montons que $\forall x \in \mathbb{R},\ d(x) \geq 0$.

d est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $d'(x) = e^x - 1$, on en déduit facilement que :

- d' s'annule pour $x = 0$.
- $d' \geq 0$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
- $d' \leq 0$ sur l'intervalle $]-\infty, 0]$.

>> D'où le tableau de variations de la fonction d

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$d'(x)$		**-**		**+**	
$d(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On voit d'après le tableau de variations ci-dessus que d admet un minima en $x=0$ et que $d(0)=0$.

$$\boxed{\text{Conclusion : Pour tout réel } x \text{ on a } d(x)=e^x-(x+1)\geq 0 \text{ d'où } e^x \geq x+1.}$$

>> Nota

On peut montrer cette inégalité de la manière suivante :

$\forall x \geq 0$, on a $e^x \geq 1 \Rightarrow \int_0^x e^t dt \geq \int_0^x dt \Rightarrow \left[e^t\right]_0^x \geq x \Rightarrow e^x - 1 \geq x \Rightarrow e^x \geq x+1$;-)

2 Une autre inégalité

On propose de montrer que pour tout réel x strictement positif on a $x^2 f(x) \leq \dfrac{x}{x+1}$, pour cela et comme indiqué dans l'énoncé, on utilise l'inégalité établie à la question précédente, c'est à dire,

$e^x \geq x+1 \Rightarrow \dfrac{1}{e^x} \leq \dfrac{1}{x+1}$, pour tout $x>0 \Rightarrow e^{-x} \leq \dfrac{1}{x+1}$ car $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$.

On divise les deux côtés de cette inégalité par x pour faire apparaître l'expression de $f(x)$ (*x étant strictement positif --> division autorisée + pas de changement de sens pour l'inégalité*).

Il vient, $\dfrac{e^{-x}}{x} \leq \dfrac{1}{x(x+1)}$, $\forall x > 0$

$$\boxed{\text{On multiplie finalement les deux côtés de cette inégalité par } x^2 \text{ et on obtient } x^2 f(x) \leq \dfrac{x}{x+1}.}$$

3 Limite de (u_n)

a. Encadrement de u_n

Il s'agit de prouver par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

>> $u_n > 0$

Pour $n=0$, on a $u_0 = 1 > 0$, donc la relation est vraie à l'ordre zéro.

On suppose que la relation est vraie à l'ordre n, c'est à dire que $u_n > 0$ et on s'intéresse à l'ordre $n+1$.

On a $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$, d'après l'hypothèse de récurrence on sait que $u_n > 0$, de plus $e^{-u_n} > 0$ (*l'exponentielle étant toujours positive*), on en déduit alors que $u_{n+1} > 0$, La relation est vraie à l'ordre $n+1$. ***Elle est donc héréditaire***.

>> $u_n \leq \frac{1}{n+1}$

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $\frac{1}{0+1} = 1$ donc la relation est vraie à l'ordre zéro.

On suppose que la relation est vraie à l'ordre n, c'est à dire que $u_n \leq \frac{1}{n+1}$ et on s'intéresse à l'ordre $n+1$.

On a $u_{n+1} = u_n{}^2 f(u_n)$, or nous avons montré à la question précédente que pour tout réel x strictement positif, on a $x^2 f(x) \leq \frac{x}{x+1}$ et comme $u_n > 0$ alors $u_n{}^2 f(u_n) \leq \frac{u_n}{u_n+1}$.

D'après l'hypothèse de récurrence on a $u_n \leq \frac{1}{n+1}$, de plus la fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est croissante sur $]0,+\infty[$ (*pas de changement de sens pour l'inégalité*).

L'inégalité $u_n{}^2 f(u_n) \leq \frac{u_n}{u_n+1}$ devient alors,

$u_n{}^2 f(u_n) \leq \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+1} \Rightarrow u_n{}^2 f(u_n) \leq \frac{1}{n+2}$, la relation est vraie à l'ordre $n+1$, ***elle est donc héréditaire***.

Finalement, pour tout entier naturel n, on a $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b. Convergence et limite de la suite (u_n)

On utilise l'encadrement de u_n démontré à la question précédente, c'est à dire $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$ et on passe à la limite (*notons que le passage à la limite fait changer les inégalités strictes en inégalités larges*),

On a, $0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ alors d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

La suite (u_n) est donc convergente et sa limite vaut zéro.

4 Etude de la suite (v_n)

a. Une autre expression de v_n

La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$, on propose de montrer que

$v_n = \ln\left(\frac{1}{u_n}\right)$.

On part de l'expression de (u_n) , c'est à dire $u_n = u_{n-1}\, e^{-u_{n-1}}$ et on « compose avec le LN » des deux côtés de l'égalité, (*notons que d'après* <u>*la question II.3.a*</u> *on a* $u_n > 0$).

$\ln(u_n) = \ln(u_{n-1}\, e^{-u_{n-1}}) = \ln(u_{n-1}) + \ln(e^{-u_{n-1}}) = \ln(u_{n-1}) - u_{n-1}$.

On passe à la somme, terme à terme,

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(u_k) = \sum_{k=1}^{n} \ln(u_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} u_{k-1}$$

$$\ln(u_1) + \ln(u_2) + \ln(u_3) + \ldots + \ln(u_n) = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \ln(u_2) + \ldots + \ln(u_{n-1}) - \sum_{k=1}^{n} u_{k-1}.$$

Après simplification, il reste,

$$\ln(u_n) = \ln(u_0) - \sum_{k=1}^{n} u_{k-1}$$

Comme $u_0 = 1$, alors $\ln(u_0) = 0$, de plus $\sum_{k=1}^{n} u_{k-1} = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = v_n$

(*décalage d'indice*).

Alors, $v_n = -\ln(u_n) = \ln\left(\frac{1}{u_n}\right)$, u_n étant strictement positif.

b. Limite de (v_n)

Nous savons d'après <u>la question II.3.a</u> que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.

Comme $v_n = \ln\left(\frac{1}{u_n}\right)$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{u_n}\right) = -\infty$.

La suite (v_n) est divergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

III Etude de F

F est la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{4x^2} f(t)\,dt \quad x>0 \\ F(0) = 2\ln(2) \end{cases}$.

1 Un encadrement

a. Valeur d'une intégrale

On a $\displaystyle\int_{x^2}^{4x^2} \frac{dt}{t} = \left[\ln|t|\right]_{x^2}^{4x^2} = \ln\left(4x^2\right) - \ln\left(x^2\right) = \ln(4) + \ln\left(x^2\right) - \ln\left(x^2\right) = \ln(4) = \ln\left(2^2\right) = 2\ln(2)$.

b. Encadrement de e^{-t} – 1

>> $e^{-t} - 1 \geq -t$

A la question II.1 on a montré que pour tout réel x, on a $e^x \geq x+1$.

Posons $x = -t$, l'inégalité devient alors $e^{-t} \geq -t+1$, autrement dit $e^{-t} - 1 \geq -t$.

>> $e^{-t} - 1 \leq 0$

On a $t > 0 \Rightarrow -t < 0 \Rightarrow e^{-t} < 1 \Rightarrow e^{-t} - 1 < 0$.

Finalement, pour tout réel t strictement positif, on a $-t \leq e^{-t} - 1 \leq 0$.

2 Continuité et dérivabilité de F à droite de zéro

a. Encadrement de F(x) – 2ln(2)

Il s'agit de montrer que pour tout réel x strictement positif, on a $-3x^2 \leq F(x) - 2\ln(2) \leq 0$, pour cela on utilise l'encadrement établit à la question précédente :

$\forall t > 0$, on a $-t \leq e^{-t} - 1 \leq 0$.

On divise ensuite les membres de cette inégalité par t (t *est strictement positif*) ce qui donne :

$-1 \leq \dfrac{e^{-t}}{t} - \dfrac{1}{t} \leq 0$.

On intègre ensuite cette inégalité sur l'intervalle $\left[x^2 , 4x^2\right]$, il vient :

$\displaystyle\int_{x^2}^{4x^2} -dt \leq \int_{x^2}^{4x^2} \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{x^2}^{4x^2} \frac{dt}{t} \leq 0$, autrement dit $\displaystyle\int_{x^2}^{4x^2} -dt \leq F(x) - \int_{x^2}^{4x^2} \frac{dt}{t} \leq 0$

On a vu à la question III.1.a que $\displaystyle\int_{x^2}^{4x^2} \frac{dt}{t} = 2\ln(2)$, de plus $\displaystyle\int_{x^2}^{4x^2} -dt = -3x^2$, d'où,

$-3x^2 \leq F(x) - 2\ln(2) \leq 0$.

$$\boxed{\text{Finalement, } -3x^2 \leq F(x) - 2\ln(2) \leq 0 .}$$

b. Continuité et dérivabilité de F à droite de zéro

>> Continuité de F à droite de zéro

Il s'agit de montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = F(0)$, pour cela on utilise l'encadrement de la question précédente.

On a $-3x^2 < F(x) - 2\ln(2) \leq 0$

On passe à la limite (*notons que le passage à la limite fait passer les inégalités strictes en inégalités larges*).

$\lim\limits_{x \to 0^+} -3x^2 \leq \lim\limits_{x \to 0^+} \left(F(x) - 2\ln(2)\right) \leq 0$

Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} -3x^2 = 0$ alors d'après les théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(F(x) - 2\ln(2)\right) = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = 2\ln(2) = F(0)$.

$$\boxed{F \text{ est donc continue à droite de zéro.}}$$

>> Dérivabilité de F à droite de zéro

On part également de l'encadrement $-3x^2 < F(x) - 2\ln(2) \leq 0$ et on fait apparaître le taux d'accroissement de F à droite de zéro.

$\forall x > 0$, on a,

$$-3x < \frac{F(x) - 2\ln(2)}{x} \leq 0 \Rightarrow -3x < \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} -3x \leq \lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \leq 0$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} -3x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0)$ alors d'après les gendarmes :

$$\boxed{F \text{ est dérivable à droite de zéro et } F'(0) = 0 .}$$

3 Limite de F au voisinage de + l'infini

a. Majoration de f(t)

Pour tout réel $t \geq 1$, $f(t)$ est majorée par e^{-t} :

$t \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{t} \leq 1 \Rightarrow \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$, notons que l'exponentielle est positive donc l'inégalité ne change pas de sens ;-)

$$\boxed{\text{Finalement, } t \geq 1 \Rightarrow f(t) \leq e^{-t} .}$$

b. Limite de f au voisinage de + l'infini

Nous venons de montrer que pour tout réel $t \geq 1$, on a $f(t) < e^{-t}$, de plus $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{t} > 0$, on en déduit alors que $0 < f(t) < e^{-t}$.

On intègre ensuite cette inégalité sur l'intervalle $\left[x^2 \,,\, 4x^2\right]$, il vient,

$$0 < \int_{x^2}^{4x^2} f(t)\,dt < \int_{x^2}^{4x^2} e^{-t}dt \Rightarrow 0 < F(x) < \int_{x^2}^{4x^2} e^{-t}dt .$$

Par ailleurs, $\displaystyle\int_{x^2}^{4x^2} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_{x^2}^{4x^2} = -\left(e^{-4x^2} - e^{-x^2}\right)$, d'où $0 < F(x) < -\left(e^{-4x^2} - e^{-x^2}\right)$.

On passe à la limite, $0 \leq \displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) \leq \lim_{x \to +\infty} -\left(e^{-4x^2} - e^{-x^2}\right)$.

Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} -\left(e^{-4x^2} - e^{-x^2}\right) = 0$ alors d'après les gendarmes, on a :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0 .}$$

4 Variations de F

a. La dérivée de F

On commence par justifier la dérivabilité de F sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et on donnera ensuite l'expression de $F'(x)$.

D'après <u>la question III.2.b</u>, on a F dérivable à droite de zéro.

Notons H la primitive de la fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ s'annulant en $x = 1$, donc :

$$H(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt .$$

Nous avons $F(x) = H(4x^2) - H(x^2)$ donc F est dérivable sur $]0, +\infty[$ (*car composée de fonctions dérivables :* H , $x \mapsto 4x^2$ *et* $x \mapsto x^2$).

>> Conclusion

F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et

$$F'(x) = 8x \times \frac{e^{-4x^2}}{4x^2} - 2x \times \frac{e^{-x^2}}{x^2} = \frac{2e^{-4x^2}}{x} - \frac{2e^{-x^2}}{x} = \frac{2\left(e^{-4x^2} - e^{-x^2}\right)}{x} .$$

b. Variations de F

>> Signe de F'

Le dénominateur de F' étant positif sur $\mathbb{R}_+^*$, le signe de dérivée est celui de $x \mapsto e^{-4x^2} - e^{-x^2}$.

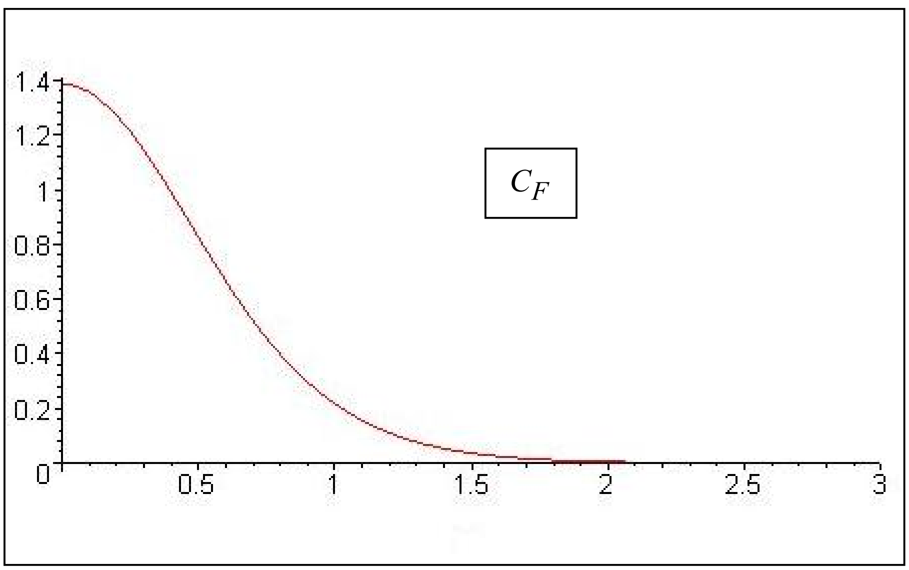
Or pour tout réel $x \geq 0$, on a $4x^2 \geq x^2 \Rightarrow -4x^2 \leq -x^2 \Rightarrow e^{-4x^2} \leq e^{-x^2}$ car $x \mapsto e^x$ est croissante.

D'où $e^{-4x^2} - e^{-x^2} \leq 0 \;\Rightarrow\; F'(x) \leq 0 \;\Rightarrow\; F$ est décroissante.

>> Tableau de variations de F

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$F'(x)$	-
$F(x)$	$2\ln(2)$ $\searrow$ 0

c. Représentation graphique de C_F



5 Limite de G

G est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $G(x) = \displaystyle\int_x^{4x} e^{-t}\ln(t)\,dt$.

a. Une autre expression de G

On intègre par parties l'expression $\displaystyle\int_x^{4x} e^{-t}\ln(t)\,dt$ en posant :

$$\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = \dfrac{1}{t} \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases},$$

Ce qui donne $G(x) = \left[-\ln|t|e^{-t}\right]_x^{4x} + \int_x^{4x} \frac{e^{-t}}{t} dt = -\left(\ln(4x)e^{-4x} + \ln(x)e^{-x}\right) + F\left(\sqrt{x}\right)$ pour tout $x > 0$.

Finalement, pour tout réel x strictement positif, on a bien $G(x) = F\left(\sqrt{x}\right) - e^{-4x}\ln(4x) + e^{-x}\ln(x)$.

b. Une limite

Valeur de $\lim_{x \to 0^+} \left(e^{-x} - e^{-4x}\right)\ln(x)$.

Pour tout x strictement positif on a $\left(e^{-x} - e^{-4x}\right)\ln(x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-4x}}{x} \times x\ln(x)$.

On sait que $\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$ et on calcule la valeur de $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{e^{-x} - e^{-4x}}{x}$.

On pose $l(x) = e^{-x} - e^{-4x}$, notons que $l(0) = 0$ et que l est dérivable, donc,

$\lim_{x \to 0^+} \dfrac{e^{-x} - e^{-4x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{l(x) - l(0)}{x - 0} = l'(0)$, par ailleurs $l'(x) = -e^{-x} + 4e^{-4x}$, d'où $l'(0) = 3$.

Finalement, $\lim_{x \to 0^+} \left(e^{-x} - e^{-4x}\right)\ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\dfrac{e^{-x} - e^{-4x}}{x} \times x\ln(x)\right) = 3 \times 0 = 0$.

c. Limite de G(x) à droite de zéro

On a montré à <u>la question III.5.a</u> que pour tout $x > 0$ on a $G(x) = F\left(\sqrt{x}\right) - e^{-4x}\ln(4x) + e^{-x}\ln(x)$, autrement dit,

$$G(x) = F\left(\sqrt{x}\right) - e^{-4x}\left(\ln(4) + \ln(x)\right) + e^{-x}\ln(x) = F\left(\sqrt{x}\right) - \ln(4)e^{-4x} + \ln(x)\left(e^{-x} - e^{-4x}\right).$$

Soit $\lim_{x \to 0^+} G(x) = \lim_{x \to 0^+} F\left(\sqrt{x}\right) - \lim_{x \to 0^+} \ln(4)e^{-4x} + \lim_{x \to 0^+} \ln(x)\left(e^{-x} - e^{-4x}\right)$.

On sait que $\lim_{x \to 0^+} F\left(\sqrt{x}\right) = F(0) = 2\ln(2)$, on sait également d'après <u>la question précédente</u> que $\lim_{x \to 0^+} \left(e^{-x} - e^{-4x}\right)\ln(x) = 0$.

D'où, $\lim_{x \to 0^+} G(x) = 2\ln(2) - \ln(4) = 2\ln(2) - 2\ln(2) = 0$.

FIN

الثانية علوم رياضية أ و ب مدة الإنجاز: 4 ساعات المعامل : 10	**الامتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريـــــــــــا** دورة : يوليوز 2004 (الدورة الاستدراكية)	**المملكة المغربية** **وزارة التربيةالوطنية والشباب**

التمرين الأول (نقطتان ونصف)

يحتوي كيسر على 10كرات بيضاء و 10كرات حمراء لا يمكن التمييز بينها باللمس .
نسحب عشوائيا كرة من الكيس . إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء نعيدها إلى الكيس وإذا كانت بيضاء نضع بدلها في الكيس 3كرات حمراء ثم نسحب كرة من الكيس .

1) أحسب الاحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان حمراوين . 0,5
2) أحسب الاحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان بيضاوين . 0,5
3) أحسب الاحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين . 0,5
4) أحسب الاحتمال لكي تكون الكرة الأولى المسحوبة بيضاء علما بأن الكرة الثانية المسحوبة بيضاء 1

التمرين الثاني (3نقط)

ا) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $(E):\ 3x-2y=1$ 0,5

2) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .
أ- بين أن الزوج $(14n+3\ ,\ 21n+4)$ حل للمعادلة (E) . 0,25
ب - استنتج أن العددين $14n+3$ و $21n+4$ أوليان فيما بينهما . 0,25

3) ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين $2n+1$ و $21n+4$.
أ- بين أن $d=1$ أو $d=13$. 0,5
ب - بين أن : $d=13 \Leftrightarrow n\equiv 6\ [13]$ 0,5

4) من أجل كل عدد صحيح طبيعي n بحيث $n\geq 2$ نضع :
$A=21n^2-17n-4$ و $B=28n^3-8n^2-17n-3$
أ- بين أن العددين A و B قابلين للقسمة على $n-1$ في المجموعة $\mathbb{Z}$. 0,5
ب - حد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B . 0,5

التمرين الثالث (4 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$
ليكن a عددا عقديا غير منعدم شكله الجبري هو: $a=\alpha+i\beta$.

1) لتكن (H) مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق : $z^2-(\bar{z})^2=a^2-(\bar{a})^2$.
أ- حدد طبيعة (H) . 0,5
ب - أنشئ (H) في الحالة : $a=1+i$. 0,5

2) لتكن (C) مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق : $(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=4a\bar{a}$.
أ- حد طبيعة (C). 0,5
ب - أنشئ (C) في الحالة : $a=1+i$. 0,5

3) نعتبر فى المجموعة $\mathbb{C}$ ، النظمة :
$$(S)\ :\ \begin{cases} z^2-(\bar{z})^2=a^2-(\bar{a})^2 \\ (z-a)(\bar{z}-\bar{a})=4a\bar{a} \end{cases}$$

ونضع $u=z-a$

أ- بين أن النظمة (S) تكافئ النظمة $(S') : \begin{cases} u\bar{u} = 4a\bar{a} \\ (u+2a)(u^3 - 8a(\bar{a})^2) = 0 \end{cases}$	0,5
ب - نضع $a = re^{i\theta}$ حيث $r > 0$ و $-\pi < \theta \leq \pi$. حدد بدلالة r و θ ألحاق نقط تقاطع (C) و (H).	0,75
ج - استنتج أن تقاطع (C) و (H) يتضمن ثلاث نقط هي رؤوس لمثلث متساوي الأضلاع .	0,75

التمرين الرابع (10 نقط و نصف)

I - لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي:

$$f(x) = 4xe^{-x\ln 2} - 2 \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$$

وليكن (C) و (Γ) المنحنيين الممثلين للدالتين f و g على التوالي في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(الوحدة : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 4cm$) .

1)أ- أحسب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$. 0,5

ب - حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C). 0,5

2) أ- بين أن : $(\forall x \in IR) : f'(x) = 4(1 - x\ln 2)e^{-x\ln 2}$ 0,5

ب - أعط جدول تغيرات الدالة f . 0,25

ج - بين أن العددين 1 و 2 هما الحلين الوحيدان للمعادلة $f(x) = 0$. 0,75

3) أدرس الدالة g : النهايات، الفروع اللانهائية ، التغيرات . 1

4) أرسم المنحنيين (C) و (Γ) في نفس المعلم . 1

(تحديد نقط الانعطاف غير مطلوب - نأخذ : $\ln 2 = 0,7$ ؛ $e = 2,7$ ؛ $\frac{1}{\ln 2} = 1,4$ ؛ $\frac{1}{e} = 0,4$)

II - ليكن k عددا حقيقيا بحيث : $0 < k < \frac{2}{e}$.

1)أ- تحقق مبيانيا أن المعادلة $g(x) = k$ تقبل حلين مختلفين لـ α و β بحيث $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$. 0,5

ب - حدد قيمة العدد k بحيث يكون العددان α و β هما حلا المعادلة : $f(x) = 0$. 0,25

نعتبر الدالة العددية f_k المعرفة على IR بما يلي : $f_k(x) = 4xe^{-kx} - 2$

2) أ- تأكد من أن : $(\forall x \in IR) : f_k'(x) = 4(1 - kx)e^{-kx}$. 0,25

ب - أعط جدول تغيرات f_k . 0,5

3) أ- استنتج أن المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين a و b بحيث : 0,5

$$a < \frac{1}{k} < b$$

ب - بين أن : $a = \alpha$ و $b = \beta$. 1

4) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $(\forall t \in IR) : \int_0^t xe^{-kx}\,dx = \frac{1}{k^2}(1 - kte^{-kt} - e^{-kt})$ 0,5

ب- أحسب التكامل $I_k = \int_\alpha^\beta f_k(x)\,dx$ بدلالة α و β . 0,5

ج- استنتج أن : $\ln(2\alpha).\ln(2\beta) \leq 1$. 0,75

5) بين أنه إذا كان u و v عددين حقيقيين مختلفين موجبين قطعا بحيث : $\frac{\ln(u)}{u} = \frac{\ln(v)}{v}$ 0,75

فإن $\ln(u).\ln(v) \leq 1$.

الشعبة: علوم رياضية	الامتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريا	المملكة المغربية
المدة: 4 ساعات	دورة يونيو 2003	وزارة التربية الوطنية و الشباب

تمرين 1 — 03pts

نعتبر في $\mathbb{N}^{*2}$ المعادلة التالية : $x^2\left(x^2+7\right)=y\left(2x+7\right) \qquad (E):$

ليكن $(x;y)\in\mathbb{N}^{*2}$ وليكن δ القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y.

نضع $x=\delta a$ و $y=\delta b$

1- لنفترض أن $(x;y)$ حل للمعادلة (E).

أ) تحقق أن: $a^2\left(\delta^2a^2+7\right)=b\left(2a+b\right)$ — 0,50

ب) استنتج أنه: يوجد عدد صحيح طبيعي k حيث $\delta^2a^2+7=kb$ و $2a+b=ka^2$ — 0,50

ت) بين أن $a=1$. — 0,50

ث) استنتج أن $(b+1)^2=\delta^2+8$ — 0,75

2- حل في $\mathbb{N}^{*2}$ المعادلة (E). — 0,75

تمرين 2 — 3pts

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر المنحنى (E) الذي معادلته $y=\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$

1- أ) بين أن (E) جزء من اهليج يتم تحديده. — 0,50

ب) أرسم المنحنى (E). — 0,50

2- لتكن $A(4;0)$ و $B(0;3)$ نقطتين.

نعتبر النقطة M_1 من (E) التي أفصولها x_1 حيث $x_1\in[0;4]$.

نضع $x_1=4\cos t_1$ حيث $0\le t_1\le\dfrac{\pi}{2}$.

و نعتبر التكامل الآتي : $I(x_1)=\dfrac{3}{4}\int_{x_1}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$.

أ) باستعمال مكاملة بتغيير المتغير و ذلك بوضع $x=4\cos t$ حيث $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$، بين أن: — 1,25

$$I(x_1)=6t_1-3\sin(2t_1)$$

ب) لتكن $S(x_1)$ مساحة السطح المحصور بين المستقيمين (OA) و (OM_1) والمنحنى (E).

ولتكن S مساحة السطح المحصور بين المستقيمين (OA) و (OB) والمنحنى (E).

- تحقق أن أرتوب النقطة M_1 هو $3\sin t_1$ 0,25
- أحسب $S(x_1)$ بدلالة t_1. 0,25
- استنتج قيمة S. 0,25

-3 * بين أن $t_1=\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow S(x_1)=\frac{1}{2}S$. 0,25

* حدد إحداثيتي M_1 في النعلم $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ في حالة $t_1=\frac{\pi}{4}$. 0,25

تمرين 3 4,5pts

I- لكل $(a;b)$ من $\mathbb{R}^2$، نعتبر المصفوفة $M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

في $M_2(\mathbb{R})$، لتكن (E) مجموعة المصفوفات الاتية: $(E)=\{M_{(a;b)}/(a;b)\in\mathbb{R}^2\}$.

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R});+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

-1 بين أن (E) جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R});+)$ و من $(M_2(\mathbb{R});\times)$. 0,75

-2 بين أن $((E);+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية. 0,25

-3 أ) بين أن لكل عددين حقيقيين x و y، لدينا: $x^2+xy+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$ 0,50

ب) حدد العناصر التي تقبل مقلوبا في الحلقة $((E);+;\times)$. 0,25

ج) استنتج أن $((E);+;\times)$ جسم تبادلي. 0,50

II- ليكن σ عددا عقديا لا ينتمي الى $\mathbb{R}$.

-1 بين أن $(1;\sigma)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C};+;\times)$. 0,25

-2 نعتبر التطبيق ψ من (E) نحو $\mathbb{C}$ المعرف بما يلي . 0,75

$$\psi:\ (E)\to\mathbb{C}$$
$$M_{(a;b)}\to a+\sigma b$$

بين أن ψ تشاكل تقابلي من $((E);+)$ نحو $(\mathbb{C};+)$

-3 نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-z+1=0$ 0,75

حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة و أكتب حليها على الشكل المثلثي.

4- نفترض في هذا السؤال أن $\sigma = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ — 0,50

بين أن ψ تشاكل من $\left((E);\times\right)$ نحو $(\mathbb{C};\times)$

تمرين4 — 9pts

I- لتكن f الدالة العددية المعرفة $]0;+\infty[$ بما يلي $f(x) = 4\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{2}$ ، و ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ و حدته $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

1- أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ، ثم حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C). — 0,50

2- أ) بين أن $\forall x \in]0;+\infty[\quad f'(x) = 4\left(\frac{1-2\ln x}{x^3}\right)$. — 0,25

ب) أعط جدول تغيرات f. — 0,75

3- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين β و α بحيث

$1 \prec \alpha \prec \sqrt{e} \prec \beta \prec 3$ (نعطي $1 \prec \ln 3 \prec 1{,}1$) — 0,75

4- حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي أفصولها 1. — 0,50

5- أرسم المنحنى (C). — 0,75

III- لكل عدد صحيح n بحيث $n \geq 4$ ، نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي:

$$f_n(x) = n\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{2}$$

و ليكن (C_n) المنحنى الممثل لدالة f_n في معلم متعامد ممنظم.

1- أدرس تغيرات الدالة f_n. — 0,50

2- أدرس تقعر (C_n) و بين أنه يقبل نقطة انعطاف أفصولها $e^{\frac{5}{6}}$. — 0,50

3- أ) قارن $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ حسب قيم x. — 0,25

ب) استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}). — 0,25

4- بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين u_n و v_n بحيث $1 \prec u_n \prec \sqrt{e} \prec v_n$ — 0,50

5- بين أن $(u_n)_{n\geq 4}$ متتالية تناقصية قطعا (يمكن استعمال نتيجة السؤال 3-III). — 050

6- أ) باستعمال نتيجة السؤال 2-II)، بين أن : — 0,25

$$\forall n \geq 4 \qquad \frac{(u_n - 1)(3 - u_n)}{2} \leq \ln(u_n) \leq u_n - 1$$

ب) استنتج أن: $\dfrac{(u_n)^2}{2n} \le u_n - 1 \le \dfrac{(u_n)^2}{n(3-u_n)}$ $\forall n \ge 4$	0 ,25
ج) بين أن $\dfrac{1}{2n} \le u_n - 1 \le \dfrac{e}{n}$ $\forall n \ge 4$	0,25
د) استنتج أن $(u_n)_{n\ge 4}$ متقاربة محددا نهايتها.	0,50
7- أ) بين أن $e^{\frac{5}{6}} \prec v_n$ $\forall n \ge 4$ (نعطي $e^{\frac{5}{6}} \prec 5,3$).	0,50
ب) استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$	0,50

Corrigé

Exercice 1

1. (a) On remplace $x = da$ et $y = db$ dans (E) :

$$\begin{aligned} & d^2a^2(d^2a^2+7) = db(2da+db) \\ \Leftrightarrow \quad & d^2a^2(d^2a^2+7) = d^2b(2a+b) \end{aligned}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \qquad a^2(d^2a^2+7) = b(2a+b)}$$

(b) D'après (a), $b|a^2(d^2a^2+7)$. Or comme $x \wedge y = d$, $a \wedge b = 1$, d'où $a^2, b\wedge = 1$. Par le théorème de Gauss, b divise donc d^2a^2+7.

Par conséquent, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\boxed{d^2a^2+7 = kb}$$

En remplaçant dans l'égalité du (a), il vient :

$$a^2kb = b(2a+b)$$

et comme $b \neq 0$,

$$\boxed{a^2k = 2a+b}$$

(c)

$$a^2k = 2a+b \quad \Rightarrow \quad b = a(ka-2) \quad \Rightarrow \quad a|b \quad \Rightarrow \quad a = a \wedge b \quad \Rightarrow \quad \boxed{a=1}$$

(d) On a alors :

$$\begin{aligned}(E) \Leftrightarrow &\quad d^2+7=b(2+b)\\ (E) \Leftrightarrow &\quad b^2+2b=d^2+7\\ (E) \Leftrightarrow &\quad b^2+2b+1=d^2+8\end{aligned}$$

$$\boxed{(E) \Leftrightarrow \quad (b+1)^2=d^2+8}$$

2. D'après (1), si (x,y) est solution de (E) alors $x=x\wedge y$, c'est-à-dire $x|y$, d'où $y=bx$, et alors :

$$\begin{aligned}& (b+1)^2=x^2+8\\ \Leftrightarrow &\quad (b+1)^2-x^2=8\\ \Leftrightarrow &\quad (b+1+x)(b+1-x)=8=2^3\end{aligned}$$

Or $b+1+x>b+1-x$, et $b+1+x+b+1-x=2(b+1)$ qui est paire, donc $b+1+x$ et $b+1-x$ sont de même parité, soit pairs, comme leur produit est pair.
On a alors : $b+1+x=4$ et $b+1-x=2$ qui sont les seules solutions. On trouve alors le système suivant :

$$\begin{cases} b+1+x=4\\ b+1-x=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+x=3\\ b-x=1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=2\\ x=1\end{cases}$$

Or $y=bx=2$.
Réciproquement, $(1,2)$ est solution de (E). Donc

$$\boxed{S=\{(1,2)\}}$$

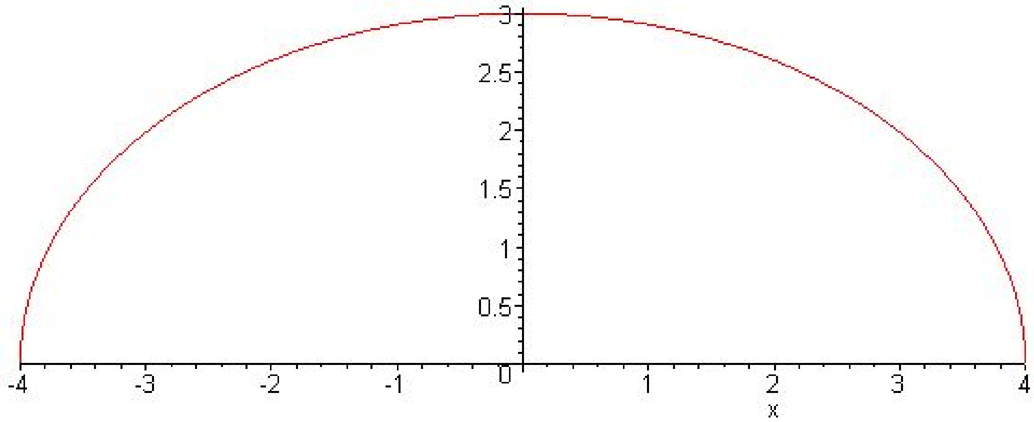
Exercice 2

1. (a)

$$\begin{aligned}(E) \Rightarrow &\quad y^2=\frac{9}{16}(16-x^2)\\ \Rightarrow &\quad \frac{16y^2}{9}+x^2=16\end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1}$$

On retrouve l'équation d'une ellipse centrée en O, d'axe (Ox), de demi-grand axe $a=4$ et de demi-petit axe $b=3$.
(E) est la partie de cette ellipse située au-dessus de l'axe (Ox).



(b)

2. (a) Avec le changement de variable $x = 4\cos t$, on trouve :

$$\begin{aligned} I(x_1) &= \frac{3}{4}\int_{t_1}^{0} \sqrt{16 - 16\cos^2 t} \times (-4\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{4}\int_{t_1}^{0} -16\sqrt{1-\cos^2 t}\sin t\,\mathrm{d}t \\ &= 12\int_{0}^{t_1} \sin^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= 12\int_{0}^{t_1} \frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= 12 \times \frac{1}{2}(t_1 - 0) - 6\left[\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{t_1} \end{aligned}$$

$$\boxed{I(x_1) = 6t_1 - 3\sin 2t_1}$$

(b) – $M_1(x_1, y_1)$ appartient à (E), donc

$$y_1 = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x_1^2}$$

Or $x_1 = 4\cos t_1$, d'où :

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{3}{4}\sqrt{16 - 16\cos^2 t_1} \\ &= 3\sqrt{1-\cos^2 t_1} \end{aligned}$$

$$\boxed{y_1 = 3\sin t_1}$$

– En faisant une figure, on voit facilement que

$$\begin{aligned} S(x_1) &= I(x_1) + \frac{x_1 \times y_1}{2} \\ &= I(x_1) + \frac{1}{2} \times 4\cos t_1 \times 3\sin t_1 \\ &= I(x_1) + 3 \times 2\sin t_1 \cos t_1 \\ &= I(x_1) + 3\sin 2t_1 \\ &= 6t_1 - 3\sin 2t_1 + 3\sin t_1 \end{aligned}$$

$$\boxed{S(x_1) = 6t_1}$$

– Clairement,

$$S = S(0) = S(4\cos\frac{\pi}{2}) = 6 \times \frac{\pi}{2} = 3\pi$$

– On a l'équation :

$$S(x_1) = \frac{1}{2}S \qquad \Leftrightarrow \qquad 6t_1 = \frac{3\pi}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{t_1 = \frac{\pi}{4}}$$

– M_1 a pour coordonnées $(4\cos t_1, 3\sin t_1)$, donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM_1} &= 4\cos t_1\vec{\imath} + 3\sin t_1\vec{\jmath}\\ &= \cos t_1 \times 4\vec{\imath} + \sin t_1 \times 3\vec{\jmath}\\ &= \cos t_1\overrightarrow{OA} + \sin t_1\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

D'où, pour $t_1 = \frac{\pi}{4}$, M_1 a pour coordonnées

$$\boxed{M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

.

Exercice 3

I.

1. Soit $\mathcal{M}_{(a_1,b_1)}, \mathcal{M}_{(a_2,b_2)} \in E$:

$$\mathcal{M}_{(a_1,b_1)} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}_{(a_2,b_2)} = \begin{pmatrix} a_2+b_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

Pour la somme :

$$\boxed{\mathcal{M}_{(a_1,b_1)} + \mathcal{M}_{(a_2,b_2)} = \begin{pmatrix} (a_1+a_2)+(b_1+b_2) & -(b_1+b_2) \\ (b_1+b_2) & (a_1+a_2) \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{(a_1+a_2,b_1+b_2)} \in E}$$

Donc E est stable pour la loi $+$.
Pour le produit :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{(a_1,b_1)}\mathcal{M}_{(a_2,b_2)} &= \begin{pmatrix} (a_1+b_1)(a_2+b_2) - b_1b_2 & -(a_1+b_1)b\_b_1a_2 \\ b_1(a_2+b_2)+a_1b_2 & -b_1b_2+a_1a_2 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2+a_1b_2+b_1a_2+b_1b_2-b_1b_2 & -a_1b_2-b_1b_2-b_1a_2 \\ b_1a_2+b_1b_2+a_1b_2 & -b_1b_2+a_1a_2 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1b_2+b_1a_2) & -(a_1b_2+b_1b_2+b_1a_2) \\ a_1b_2+b_1b_2+b_1a_2 & a_1a_2-b_1b_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{M}_{(a_1,b_1)}\mathcal{M}_{(a_2,b_2)} = \mathcal{M}_{(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+b_1b_2+b_1a_2)} \in E}$$

Donc E est stable pour la loi $\times$.
E est donc une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ et de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

2. $(E,+)$ est un sous-groupe de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car E est non vide et E est stable par $+$, et pour tout $\mathcal{M}_{(a,b)} \in E$, on a $-\mathcal{M}_{(a,b)} = \mathcal{M}_{(-a,-b)} \in E$.
En outre, la stabilité de E par $\times$ suffit pour conclure que $(E,+,\times)$ est un sous-anneau de l'anneau $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$.
Pour tout (a_1,b_1) et (a_2,b_2) de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{(a_2,b_2)}\mathcal{M}_{(a_1,b_1)} &= \begin{pmatrix}(a_2+b_2)(a_1+b_1)-b_1b_2 & -(a_2+b_2)b_1-b_2a_1\\ (a_1+b_1)b_2+a_2b_1 & -b_1b_2+a_1a_1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1b_2+b_1a_2) & -(a_1b_2+b_1b_2+b_1a_2)\\ a_1b_2+b_1b_2+b_1a_2 & a_1a_2-b_1b_2\end{pmatrix}\\ &= \mathcal{M}_{(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+b_1b_2+b_1a_2)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{M}_{(a_2,b_2)}\mathcal{M}_{(a_1,b_1)} = \mathcal{M}_{(a_1,b_1)}\mathcal{M}_{(a_2,b_2)}}$$

Donc $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.
Puisque $I = \mathcal{M}_{(1,0)} \in E$, E est unitaire et d'unité la matrice unité I.

3. (a) Résolvons l'équation du second degré $x^2+xy+y^2=0$ en x. L'équation a pour discriminant :

$$\Delta = y^2 - 4y^2 = -3y^2 \leqslant 0$$

L'équation admet une solution réelle uniquement pour $y=0$. Cette solution est alors :

$$x = -\frac{y}{2} = 0$$

Ainsi,

$$\boxed{x^2+xy+y^2=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x=y=0}.$$

(b) Un élément $\mathcal{M}_{(a,b)}$ de E est inversible si et seulement si $\det \mathcal{M}_{(a,b)} \neq 0$.
Or

$$\det \mathcal{M}_{(a,b)} = a(a+b)+b^2 = a^2+ab+b^2$$

Le déterminant est donc nul uniquement si $a=b=0$, soit pour $\mathcal{M}_{(0,0)}$.
Ainsi, tous les éléments de E sauf $\mathcal{M}_{(0,0)}$ sont inversibles.

(c) $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif non réduit à $\{0\}$, et tout élément non nul de E est inversible pour le produit.
Par conséquent, $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

II.

1. Posons $u = x+iy$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$ (u n'est pas réel). Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, montrons que $a+ub=0 \Rightarrow a=b=0$.

$$a+ub=0 \Leftrightarrow a+xb+iyb=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+xb=0\\ yb=0\end{cases}$$

Or $y \neq 0$, donc on a $b=0$, ce qui donne aussi $a=0$. Ainsi,

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2, a+ub=0 \Rightarrow a=b=0$$

Donc $(1,u)$ est une famille libre.
Montrons que $(1,u)$ est génératrice. Prenons alors $v \in \mathbb{C}$, et montrons qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $v = a+bu$.
On a $v = v_1+iv_2$, avec $(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$, et $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2, a+bu = a+xb+iyb$.

Soit, en posant $b = \dfrac{v_2}{y}$ et $a = v_1 - bx = v_1 - \dfrac{v_2 x}{y}$, on a bien $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$a + bu = v_1 - \frac{v_2 x}{y} + \frac{v_2}{y}x + i\frac{v_2}{y}y = v_1 + iv_2 = v$$

Par conséquent,

$$\forall v \in \mathbb{C}, \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, v = a + bu$$

Donc $(1,u)$ est une famille génératrice.

Par conséquent, $(1,u)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

2. Soit $(\mathcal{M}_{(a_1,b_1)}, \mathcal{M}_{(a_2,b_2)}) \in E^2$. Alors :

$$\begin{aligned}\psi(\mathcal{M}_{(a_1,b_1)} + \mathcal{M}_{(a_2,b_2)}) &= \psi(\mathcal{M}_{(a_1+a_2,b_1+b_2)}) \\ &= a_1 + a_2 + (b_1+b_2)u \\ &= (a_1 + b_1 u) + (a_2 + b_2 u)\end{aligned}$$

$$\boxed{\psi(\mathcal{M}_{(a_1,b_1)} + \mathcal{M}_{(a_2,b_2)}) = \psi(\mathcal{M}_{(a_1,b_1)}) + \psi(\mathcal{M}_{(a_2,b_2)})}$$

ψ est donc un morphisme de $(E,+)$ dans $(\mathbb{C},+)$. Montrons que ψ est bijective.

On voit clairement qu'à chaque matrice $\mathcal{M}_{(a,b)} \in E$ correspond un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et réciproquement. De plus, comme $(1,u)$ est une base de $(\mathbb{C},+,\cdot)$, à chaque $z \in \mathbb{C}$ correspond un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + bu$, et réciproquement.

Par conséquent, à chaque matrice $\mathcal{M}_{(a,b)} \in E$ correspond un unique $z \in \mathbb{C}$ et réciproquement, donc ψ est bijective.

On a donc montré que ψ est un isomorphisme de groupe de $(E,+)$ sur $(\mathbb{C},+)$.

3. L'équation dans $\mathbb{C}$ $z^2 - z + 1 = 0$ a pour discriminant :

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

Elle admet donc deux solutions complexes conjuguées, à savoir :

$$z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Donc

$$\boxed{S = \left\{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}}$$

Sous forme trigonométrique, cela nous donne :

$$\boxed{S = \left\{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}, \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}}$$

4. Remarquons premièrement que u est solution de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$, donc $u^2 = u - 1$.

On a :

$$\begin{aligned}\psi(\mathcal{M}_{(a_1,b_1)} \times \mathcal{M}_{(a_2,b_2)}) &= \psi(\mathcal{M}_{(a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+b_1b_2+b_1a_2)}) \\ &= a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + b_1b_2 + b_1a_2)u\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\psi(\mathcal{M}_{(a_1,b_1)}) \times \psi(\mathcal{M}_{(a_2,b_2)}) &= (a_1 + b_1u)(a_2 + b_2u) \\ &= a_1a_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)u + b_1b_2u^2 \\ &= a_1a_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)u + b_1b_2(u-1) \\ &= a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + b_1b_2 + b_1a_2)u\end{aligned}$$

$$\boxed{\psi(\mathcal{M}_{(a_1,b_1)} \times \mathcal{M}_{(a_2,b_2)}) = \psi(\mathcal{M}_{(a_1,b_1)}) \times \psi(\mathcal{M}_{(a_2,b_2)})}$$

D'où ψ est un morphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{C}, \times)$. On a montré auparavant que ψ est bijective, donc ψ est un isomorphisme de $(E, \times)$ sur $(\mathbb{C}, \times)$.

Exercice 4

I.

1. En 0^+ :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{4}{x^2} = +\infty$$

d'où :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}$$

En $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

donc

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}}$$

Donc (C) admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$.

2. (a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout x de $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = 4\frac{x^2/x - 2x \ln x}{x^4}$$

$$\boxed{f'(x) = 4\frac{1 - 2\ln x}{x^3}}$$

(b) Pour tout $x > 0$, $x^3 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 2\ln x$. $x \mapsto 1 - 2\ln x$ est strictement décroissante (car ln est strictement croissante) sur $]0, +\infty[$, et s'annule pour $\ln x = 1/2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\mathrm{e}}$. On a donc le tableau de variations suivant pour f :

x	0		$\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
f'		$+$		$-$	
f			$2\mathrm{e}^{-1} - 1/2$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-1/2$

3. f est dérivable donc continue sur $]0, +\infty[$.
f est continue et strictement croissante sur $]0, \sqrt{\mathrm{e}}]$, donc la restriction de f à $]0, \sqrt{\mathrm{e}}]$ est une bijection de $]0, \sqrt{\mathrm{e}}]$ sur $]-\infty, 2\mathrm{e}^{-1} - 1/2]$. Ainsi, tout élément de $]-\infty, 2\mathrm{e}^{-1} - 1/2]$ admet un unique antécédent par f dans $]0, \sqrt{\mathrm{e}}[$. Or $0 \in]-\infty, 2\mathrm{e}^{-1} - 1/2]$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a dans $]0, \sqrt{\mathrm{e}}]$.
De même, f est continue et strictement décroissante sur $[\sqrt{\mathrm{e}}, +\infty[$, donc la restriction de f à $[\sqrt{\mathrm{e}}, +\infty[$ est une bijection de $[\sqrt{\mathrm{e}}, +\infty[$ sur $[2\mathrm{e}^{-1} - 1/2, -1/2]$. Ainsi, tout élément de $[2\mathrm{e}^{-1} -$

$1/2, -1/2]$ admet un unique antécédent par f dans $[\sqrt{\mathrm{e}}, +\infty[$. Or $0 \in [2\mathrm{e}^{-1} - 1/2, -1/2]$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution b dans $[\sqrt{\mathrm{e}}, +\infty[$.

De plus, on a

$$f(1) = -1/2 < f(a) = 0 < f(\sqrt{\mathrm{e}}) = 2\mathrm{e}^{-1} - 1/2$$

et f est strictement croissante sur $]0, \sqrt{\mathrm{e}}]$, donc

$$1 < a < \sqrt{\mathrm{e}}$$

De même :

$$f(\sqrt{\mathrm{e}}) > f(b) = 0 > f(3)$$

car

$$1 < \ln 3 < 1,1 \Rightarrow 4/9 < \frac{4\ln 3}{3^2} < \frac{4,4}{9} \Rightarrow -\frac{1}{18} < f(3) < -\frac{1}{90} < 0$$

et f est strictement décroissante sur $[\sqrt{\mathrm{e}}, +\infty[$, donc

$$\sqrt{\mathrm{e}} < b < 3$$

Par conséquent, l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions a et b vérifiant :

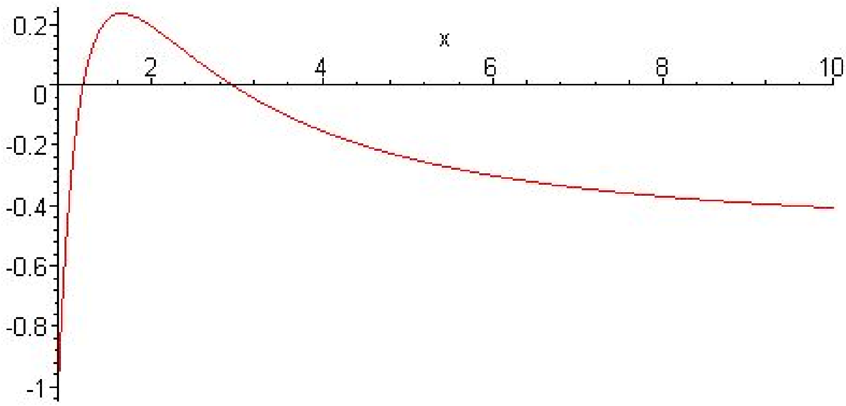
$$\boxed{1 < a < \sqrt{\mathrm{e}} < b < 3}$$

4. On a $f(1) = -1/2$ et $f'(1) = 4$, d'où l'équation de (T), tangente à (C) au point d'abscisse 1, a pour équation :

$$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$\boxed{y = 4x - \frac{9}{2}}$$

5.



II.

1. Pour tout $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} & 1+t \geqslant 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{1+t} \leqslant 1 \end{aligned}$$

(car $x \mapsto 1/x$ strictement décroissante sur $]0, +\infty[$).

De plus,

$$\begin{aligned} & 1 - t^2 \leqslant 1 \\ \Leftrightarrow \quad & (1-t)(1+t) \leqslant 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 - t \leqslant \frac{1}{1+t} \end{aligned}$$

car $1+t>0$.
D'où on trouve la double inégalité cherchée : pour tout t de $[0,+\infty[$,

$$\boxed{1-t \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1}$$

2. En intégrant la relation précédente entre 0 et a :

$$\int_0^a (1-t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{1+t} \leqslant \int_0^a \mathrm{d}t$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boxed{a-\frac{a^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant a}$$

III.

1. f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables. Pour tout x de $]0,+\infty[$,

$$\boxed{f_n'(x) = n\frac{1-2\ln x}{x^3}}$$

Les variations sont les mêmes que pour f...

2. f_n' est aussi dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$,

$$f_n''(x) = n\frac{-2x^3/x - 3x^2(1-2\ln x)}{x^6}$$

$$\boxed{f_n''(x) = n\frac{6\ln x - 5}{x^4}}$$

On a $n>0$, $x^4>0$, donc f_n'' est du signe de $x\mapsto 6\ln x - 5$, qui est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, et s'annule pour $x=\mathrm{e}^{5/6}$.
Ainsi, f_n'' est strictement négative sur $]0,\mathrm{e}^{5/6}[$, s'annule en $\mathrm{e}^{5/6}$, et est strictement positive sur $]\mathrm{e}^{5/6},+\infty[$.
D'où, (C_n) est concave sur $]0,\mathrm{e}^{5/6}[$, convexe sur $]\mathrm{e}^{5/6},+\infty[$, et admet un point d'inflexion d'abscisse $\mathrm{e}^{5/6}$.

3. (a)

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

et pour tout x de $]0,+\infty[$, $x^2>0$, donc : pour $0<x<1$, $f_{n+1}(x)<f_n(x)$; pour $x>1$, $f_{n+1}(x)>f_n(x)$. En $x=1$, $f_{n+1}(x)=f_n(x)$.

(b) Il en découle que sur $]0,1[$, (C_{n+1}) est en dessous de (C_n), et sur $]1,+\infty[$, (C_n) est en-dessous de (C_{n+1}). Les deux courbes se coupent au point d'abscisse 1.

4. On prend exactement la même démonstration qu'au I-3, en remplaçant a et b par u_n et v_n.

5. On sait que pour tout x de $]1,+\infty[$, $f_{n+1}(x)>f_n(x)$. Or $u_n\in]1,+\infty[$, d'où

$$f_{n+1}(u_n) > f_n(u_n) = 0$$

Or $f_{n+1}(u_{n+1})=0$, d'où :

$$f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$$

f_{n+1} est strictement croissante sur $]1,\sqrt{\mathrm{e}}[$, et $u_n, u_{n+1}\in]1,\sqrt{\mathrm{e}}[$, donc :

$$\boxed{u_n > u_{n+1}}$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 4}$ est donc strictement décroissante.

6. (a) Pour tout $n \geqslant 4$, $u_n > 1$, donc $u_n - 1 > 0$. En appliquant la formule de II-2, on trouve alors :

$$u_n - 1 - \frac{(u_n-1)^2}{2} \leqslant \ln u_n \leqslant u_n - 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{(u_n-1)(2-u_n+1)}{2} \leqslant \ln u_n \leqslant u_n - 1$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leqslant \ln u_n \leqslant u_n - 1}$$

(b) Partons du fait que $f_n(u_n) = 0$:

$$f_n(u_n) = \frac{n \ln u_n}{u_n^2} - \frac{1}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad \ln u_n = \frac{u_n^2}{2n}$$

Or d'après la question précédente,

$$\ln u_n = \frac{u_n^2}{2n} \leqslant u_n - 1.$$

De plus,

$$\frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \leqslant \ln u_n = \frac{u_n^2}{2n}$$
$$\Leftrightarrow \qquad u_n - 1 \leqslant \frac{2u_n^2}{2n(3-u_n)}$$

(la division par $3 - u_n$ ne change pas le sens de l'inégalité car $u_n < \sqrt{\mathrm{e}} < 3$.
Ainsi, on trouve l'inégalité cherchée : pour tout $n \geqslant 4$,

$$\boxed{\frac{u_n^2}{2n} \leqslant u_n - 1 \leqslant \frac{u_n^2}{n(3-u_n)}}$$

(c) Par ailleurs, on sait que $1 < u_n < \sqrt{\mathrm{e}}$, donc $\dfrac{1}{2n} \leqslant \dfrac{u_n^2}{2n}$, et $\dfrac{u_n^2}{n(3-u_n)} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n(3-u_n)}$.

De plus,

$$u_n \leqslant \sqrt{\mathrm{e}} \approx 1,65 \leqslant 2$$
$$\Leftrightarrow \qquad u_n + 1 \leqslant 3$$
$$\Leftrightarrow \qquad 3 - u_n \geqslant 1$$
$$\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{3-u_n} \leqslant 1$$
$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{e}}{n(3-u_n)} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n}$$

Ainsi, on trouve :

$$\boxed{\frac{1}{2n} \leqslant u_n - 1 \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n}}$$

(d) Clairement,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{n} = 0$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - 1 = 0$$

d'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

7. (a) Calculons $f_n(\mathrm{e}^{5/6})$ pour tout $n \geqslant 4$:

$$\begin{aligned} f_n(\mathrm{e}^{5/6}) &= \frac{5n}{6\mathrm{e}^{5/3}} - \frac{1}{2} \\ &\geqslant \frac{5\times 4}{6\times 5,3} - \frac{1}{2} \\ &\geqslant 0,12 \\ &> 0 \end{aligned}$$

Or $f_n(v_n) = 0$, donc $f_n(\mathrm{e}^{5/6}) > f_n(v_n)$, d'où comme $v_n, \mathrm{e}^{5/6} \in [\sqrt{\mathrm{e}}, +\infty[$ et f_n est strictement décroissante sur cet intervalle,

$$\boxed{v_n > \mathrm{e}^{5/6}}.$$

(b) Pour tout $n \geqslant 4$, par définition $f_n(v_n) = 0$ donne $v_n^2 = 2n\ln(v_n)$.
Le $(7a)$ donne $\ln v_n > 5/6$.
D'où

$$v_n^2 > \frac{5}{3}n$$

$$v_n > \sqrt{\frac{5}{3}n}$$

Et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{5}{3}n} = +\infty$, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty}.$$

تمرين1 03pts

لدينا صندوقان U و V . الصندوق U يحتوي على 4 كرات حمراء و 4 كرات زرقاء

الصندوق V يحتوي على كرتين حمراويين و 4 كرات زرقاء

نعتبر التجربة الاتية:

نسحب عشوائيا كرة من الصندوق U، اذا كانت حمراء نضعها في الصندوق V ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V، و اذا كانت زرقاء نضعها جانبا ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V

ولتكن الأحداث التالية:

R_1 " الكرة المسحوبة من U حمراء"

B_1 " الكرة المسحوبة من U زرقاء"

R_2 " الكرة المسحوبة من Vحمراء"

B_2 " الكرة المسحوبة من Vحمراء"

1- أحسب احتمال R_1 و B_1 1

2- أحسب احتمال " B_2 علما أن R_1 محقق" و احتمال " B_2 علما أن B_1 محقق" 1

3- بين أن $p(B_2)=\frac{13}{21}$ 0,50

4- استنتج $p(R_2)$ 0,50

تمرين2 4,50

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث $0 \le \theta \prec 2\pi$ نضع $p=5\cos\theta+3i\sin\theta$.

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) التالية $(E):\quad z^2-2pz+16=0$

1- أ) تحقق ان $p^2-(3\cos\theta+5i\sin\theta)^2=16$ 0,50

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E): نرمز ب z_1 و z_2 لحلي المعادلة (E) حيث $|z_1|\prec|z_2|$ 0,50

2- المستوى العقدي منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقطتين M_1 و M_2 اللتين لحقاهما على التوالي z_1 و z_2.

أ) بين أنه عندما يتغير θ في $[0;2\pi[$ فان النقطة M_1 تتغير على دائرة (C) ينبغي تحديد معادلتها 0,50

ب) لتكن P منتصف $[M_1M_2]$.

و لتكن (Γ) مجموعة النقط P عندما يتغير θ في $[0;2\pi[$ 0,50

بين أن (Γ) اهليج بؤرتاه النقطتان F و F' اللتين لحقاهما 4 و 4-.

3-أ) بين أنه لكل عددين عقديين a و b من $\mathbb{C}-\{4\}$ لدينا: $(ab=16) \Leftrightarrow \left(\frac{b+4}{b-4}=-\frac{a+4}{a-4}\right)$ 0,50

ب) استنتج أن $\frac{z_2+4}{z_2-4}=-\frac{z_1+4}{z_1-4}$ 0,50

ج) بين أن $\left(\overrightarrow{M_1F};\overrightarrow{M_1F'}\right)\equiv \pi+\left(\overrightarrow{M_2F};\overrightarrow{M_2F'}\right)\quad [2\pi]$ 0,50

4- أ) بين أن معادلة المماس (T) للمنحنى (Γ) في النقطة P هي $3x\cos\theta+5y\sin\theta=15$ 0,50

ب) بين أن المماس (T) عمودي على (M_1M_2). 0,50

تمرين 3 03

I- لكل $(a;b)$ من $\mathbb{Z}^2$، نعتبر المصفوفة $M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}$

في $M_2(\mathbb{R})$،لتكن (E) مجموعة المصفوفات الاتية: $(E)=\left\{M_{(a;b)} / a^2-2b^2=1\right\}$.

1- نضع $A=\begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ ، تحقق أن $A\in(E)$ 0,25

2- أ- بين أن (E) جزء مستقر في $(M_2(\mathbb{R});\times)$ و أن القانون $\times$ تبادلي في (E) 0,50

ب- بين أن جميع عناصر (E) تقبل مقلوبا في (E) بالنسبة لقانون التركيب الداخلي $\times$ 0,50

ج- بين أن $((E);\times)$ زمرة تبادلية. 0,50

3- نضع $A^0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و لكل n من $\mathbb{N}$ $\quad A^{n+1}=A^n\times A$. نعتبر المجموعة $G=\left\{A^n / n\in\mathbb{N}\right\}$

أ) تحقق أن $G\subset(E)$ 0,25

ب) لتكن H مجموعة مماثلات مصفوفات G بالنسبة للعملية $\times$ في (E) 0,50

بين أن $H=\left\{B^n / n\in\mathbb{N}\right\}$ حيث $B\begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$

ج) بين أن $G\cup H$ زمرة جزئية من $((E);\times)$ 0,50

تمرين 4	**9,50**
-I ليكن $n\in\mathbb{N}^*$.	
نعتبر g_n الدالة العددية المعرفة $\mathbb{R}$ بما يلي $g_n(x)=x+e^{-nx}$ ، و ليكن (C_n) منحنى الدالة g_n في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$	
1- أ- أدرس تغيرات g_n	0,50
ب- بين أن g_n تقبل قيمة دنيا عند عدد حقيقي u_n يتم تحديده بدلالة n	0,50
2- أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g_n(x)$ ،	0,50
ب) حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_n)	0,50
3- أ) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) المثلين g_1 و g_2	0,50
ب) أنشئ (C_1) و (C_2) (نأخذ $\\|\vec{i}\\|=\\|\vec{j}\\|=2cm$; $\ln 2\approx 0;7$)	0,50
4- أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب بدلالة x التكامل: $I(x)=\int_0^x te^{-2t}dt$	0,50
ب) لتكن h_2 قصور الدالة g_2 على $[0;\ln 2]$.	0,50
أحسب حجم مجسم الدوران المولد من دوران التمثيل المبياني لـ h_2 حول محور الأفاصيل.	
5- نضع $v_n=g_n(u_n)$	1
بين أن المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربتان و حدد نهايتهما.	
II نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f_n(x)=x+e^{nx}$	
و ليكن (Γ_n) المنحنى الممثل لدالة f_n في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u};\vec{v})$.	
1- أدرس تغيرات الدالة f_n.	0,50
2- استنتج أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n.	0,50
3- أ) بين أن $\alpha_1\in\left]-\ln 2;-\frac{1}{2}\right[$	0,25
ب) بين أن $x-\alpha_1$ و $e^x+\alpha_1$ لهما نفس الإشارة.	0,50
4- أ) لتكن φ الدالة المعرفة على $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ بما يلي $\varphi(x)=e^x-\frac{1}{\sqrt{e}}x$	
بين أن φ تناقصية على $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$.	0,50
ب) استنتج أن $\left\|e^x+\alpha_1\right\|\le\frac{1}{\sqrt{e}}\left\|x-\alpha_1\right\|$	0,50

5- نضع $\beta_0 = -\frac{1}{2}$ **و لكل عدد صحيح طبيعي** n **:** $\beta_{n+1} = e^{-\beta_n}$

أ) بين أنه يوجد عدد حقيقي a **حيث** $\left|\beta_{n+1} \quad \alpha_{1}\right| \quad a\left|\beta_n \quad {}_{1}\right| \quad \forall n \in \mathbb{N}$.	0 ,50
ب) بين أن المتتالية (β_n) **متقاربة وحدد نهايتها.**	0,50